0 до k максимальное k_1, достаточное для локализации пластических деформаций в слое, почти равномерно изменяется от $0.82k$ до k.

Список использованной литературы:

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.- М.: ИЛ.-1954. - 647с.
2. Кривень В.А. Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень. -Доп. АН УРСР, сер.А, №2,1983.- С.33-37.
3. Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности.- Докл. АН СССР.- 1974.- 218, №4.- С. 779-782.
4. Артур П., Блекберн У. Влияние формы пластической зоны на ее протяженность и раскрытие трещин// Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению - М.: Мир. - 1972. - С. 107-118.
5. Кривень В.А. Антиплоска пружно-пластична задача для тіла з жорстким призматичним включенням правильної форми// Фіз.-хім. механіка матеріалів.- 2000.-№1. - С.23-26.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. –М.: Физматгиз. - 1968. –512с.

Поступила в редколлегию 29.04.2001 г.

УДК 539.3

Р.Ш. ГИМАДИЕВ, д-р техн. наук, Херсонский гос. техн. ун-т

ДИНАМИКА НИТИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

При исследовании динамики абсолютно гибкой нити обнаружены разрывные решения[1]. В этой работе изучается нелинейные продольные колебания весомой нити при периодическом возбуждении свободного конца нити.

1.**Постановка.** Уравнение движения нити запишем в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial s} + \rho_0 g, \tag{1}$$

где ρ_0 линейная плотность нити, ϑ - смещение точки нити, N - натяжение в нити, s - лагранжева координата точки нити, g - гравитационное ускорение.

Физическое соотношение примем в виде закона Кельвина-Фойгта

$$N = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}, \tag{2}$$

где E, m - модуль упругости и коэффициент физической вязкости, $e=(\partial x/\partial s-1)$ - относительное удлинение нити, x - эйлерова координата (начало отсчета координат x и s - в точке подвеса), $\dot e$ - скорость деформации.

Нить свободно подвешена, сила веса в покое $r_0(\mathbf{l}-s)g$ уравновешивается натяжением (2) $Ee_0(s)$, следовательно, начальное значение деформации составляет $e_0=e_0(s)=r_0(\mathbf{l}-s)g/E$.

Для скорости деформации $\dot e$ запишем соотношение

$$\dot e=\frac{\partial\,(e+e_0)}{\partial\,t}=\frac{\partial}{\partial\,t}\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,s}-1\right)=\frac{\partial}{\partial\,s}\left(\frac{\partial\,(x-s)}{\partial\,t}\right)=\frac{\partial}{\partial\,s}\left(\frac{\partial J}{\partial\,t}\right)=\frac{\partial\,\dot J}{\partial\,s}. \quad (3)$$

Положим, в результате деформации элементы нити не проникают друг в друга, следовательно, нужно положить $\partial\,x/\partial\,s\geq 0$.

Так как нить не воспринимает сжимающие усилия, то для выражения (2) запишем ограничение $N\geq 0$.

Рассмотрим (1), (2) в безразмерном виде, для чего введем характерные величины $\mathbf{l}$, $N_0=E$, $c_0=\sqrt{E/r_0}$ - длина нити, натяжение и скорость упругой волны. Тогда система уравнений, описывающая динамику нити, примет вид

$$\frac{\partial\,\dot J}{\partial\,t}=\frac{\partial\,N}{\partial\,s}+g,\quad N=e+e_0+m\frac{\partial\,e}{\partial\,t},\quad \frac{\partial\,e}{\partial\,t}=\frac{\partial\,\dot J}{\partial\,s}, \quad (4)$$

с ограничениями

$$\frac{\partial\,x}{\partial\,s}\geq 0,\quad N\geq 0. \quad (5)$$

Пусть свободный конец подвешенной нити совершает периодическое колебание по закону $A\sin w\,t$, A - амплитуда колебания, w - круговая частота.

Начальные и граничные условия задачи:

$$x(s,0)=s[1+e_0(s)],\ (s\leq 1),\quad \dot J(s,0)=0,\ (s<1),$$
$$x(0,t)=0,\ \ x[1+e_0(1),t]=1+e_0(1)+A\sin w\,t. \quad (6)$$

Метод решения. При решении системы уравнений (4) с ограничениями (5), начальными и граничными условиями (6) используется явная схема метода конечных разностей. При колебании нити за счет высокой скорости деформации нить нагревается и энергия рассеивается, физическая вязкость, входящая в формулу (2), учитывает диссипацию энергии. Явные схемы обладают осцилляцией решений за фронтом волн. Расчеты показывают, что эта вязкость также гасит паразитические колебания, появляющиеся в результате численной реализации.

Рассматривается дискретная область

$$s_i = i\Delta s\,, t_n = n\Delta t\ ,(n = 0,1,...t\ /\Delta t\ -1,\ \ i = 1,2,...s/\Delta s)\,.$$

Для аппроксимации производных используются центральные разности на полуцелой сетке. Схема обладает вторым порядком аппроксимации по координате s и по времени t.

Шаг интегрирования выбирается на основе численного эксперимента в области устойчивости счета по критерию Куранта $\Delta t\ \le \Delta s / c_0$.

Тестовая отработка программы. Оценим скорость движения волны деформации U к неподвижной опоре для невесомой нити, к нижнему концу которой приложена сила $P = const$.

Как при поперечном [2], так и при продольном ударе по нити, волна деформации распространяется с постоянным значением скорости и с прямым скачком на переднем фронте волны. Начиная с момента приложения силы P волна деформации со средней скоростью U распространяется к точке подвеса. При достижении волной точки подвеса кинетическая энергия нити равна $r_0 \mathbf{l} U^2/2$. Работа, совершаемая силой P на растяжение нити на длину $\Delta \mathbf{l}_k$, составляет $P\Delta \mathbf{l}_k/2$. Из этих соотношений получаем $U = \sqrt{Pe_k\ /\ r_0} = c_0 e_k = c_0 P/E$, расчеты по $(4)\div(5)$ дают то же самое.

Результаты. Решение проведем при следующих параметрах: $E = 2750$ Н; $\mathbf{l} = 1$ м; $r_0 = 0.0026$ кг/м. Нижний конец нити совершает периодические колебания по закону $A \sin w\,t$.

Расчеты показывают, что при $m < 0.001$ на динамику нити заметное влияние оказывают осцилляции решений за фронтом волн, значение этого коэффициента примем равным $m = 0.003$, а $w = 6$ и $A = 0{,}005$.

Для этой задачи с самого начала $¶\, \dot{J} / ¶\, s \neq 0$ èëè $\dot{e} \neq 0$, обе составляющие в (2) существенны. При движении волны к точке подвеса величина амплитуды несколько падает за счет влияния вязкостного

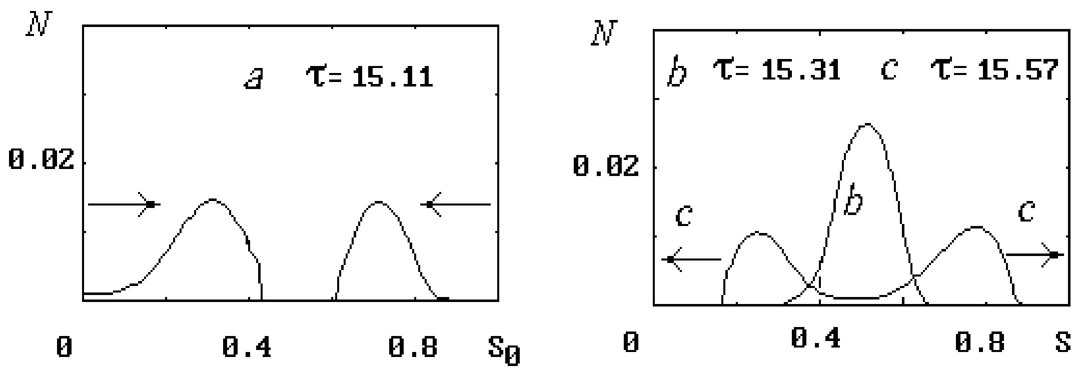
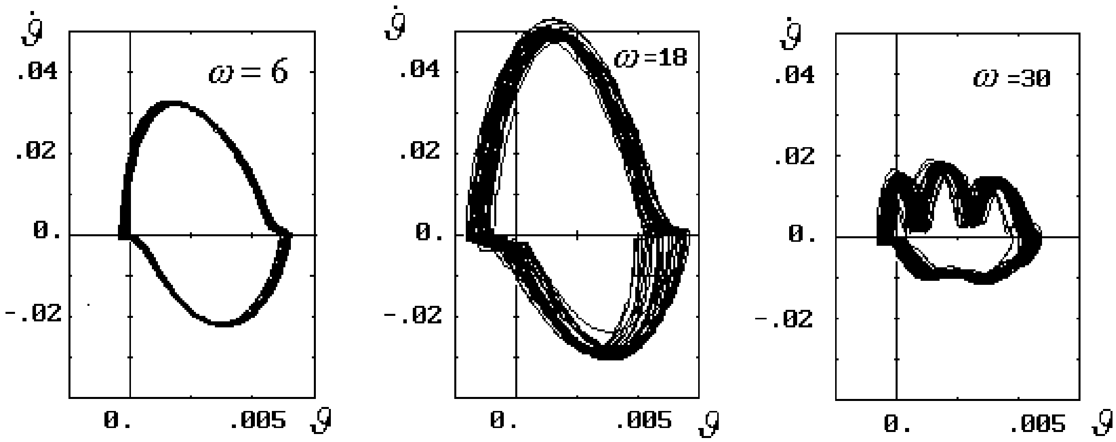


Рис.1 Усиление отраженной волны волной возбуждения

члена в (2). При достижении волной деформации точки подвеса амплитуда натяжения удваивается, скорость волны снижается до нуля и меняется направление. Волна натяжения движется обратно к нижнему периодически возбуждаемому концу. Отраженные и возбуждаемые волны при встрече усиливаются. Достаточно продолжительное время они различны по амплитуде и видимого эффекта усиления не наблюдается. В некоторый момент времени, рис. $1a$, встречаются волны больших амплитуд и примерно равных величин. Волны усиливают друг друга, и после максимального нарастания амплитуды, рис. $1b$, эти волны, уменьшаясь, продолжают двигаться в своих направлениях, рис. $1c$. Таким образом, удвоение амплитуды при периодическом возбуждении реализуется не только в точке подвеса, но и в промежуточных элементах нити.

Построим фазовые траектории - графики функций скорости от перемещения точки нити s_i за отрезок времени $t_2 - t_1$: $\dot{J} = f(J)$.

На рис. 2a приводится фазовый портрет при частоте $w = 6$ для точки нити $s = 0.5$ за промежуток времени $t_2 - t_1 = 100T$, где $T = 2p/w$ - период колебания подвижного конца нити, результаты достаточно хорошо согласуются с данными работы [1]. Разрывы на графике $\dot{J} = f(J)$ связаны с условием $N \geq 0$, т.е. нить не воспринимает сжимающие усилия при сближении двух соседних точек нити при движении. На рис. 2b и 2c приводятся фазовые портреты на интервалах времен 100T при частотах $w = 18$ и $w = 30$.



a) *b*) *c*)

Рис.2 Фазовые портреты $s = 0.5$ на интервалах времен $100T$

Для вязкоупругого стержня собственная частота вычисляется по формуле $w_m = mp\sqrt{1-(mmp/2)^2}$ и на частотах возбуждения, кратных трем, $w = 3m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$. ожидается резонансный режим.

Амплитудой вынужденных колебаний определяются максимальные динамические натяжения в нити. При одном и том же значении возбуждающей амплитуды колебания A, возникающая амплитуда колебания скорости и натяжения в нити могут значительно изменяться в зависимости от изменения частоты колебания w. Известно также, для линейной системы с осциллятором вынужденные колебания происходят с частотой возмущающей силы и при резонансе амплитуда вынужденных колебаний остается конечной и не самой большой из возможных значений [3]. Расчеты динамики нити по нелинейной модели (4), (5), (6) показывают, что при увеличении w от 1 до 18 значение максимального отклонения возбужденной скорости $d = \left[(+\dot{J}) - (-\dot{J})\right]$ возрастает, затем при дальнейшем увеличении падает. Здесь также наблюдается, что максимальные отклонения d сдвинуты относительно резонансных частот. Значения d для частот $w = 3m$, $m = 1, \ldots, 10$ составляют

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0.047	0.059	0.074	0.083	0.087	0.090	0.068	0.053	0.050	0.042

Расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении частоты

w для большей части нити фазовый портрет интенсивно притягивается к области с минимальными размерами (практически в точку) и эта область уже больше не расширяется. Для различных элементов нити имеем различные фазовые траектории и области притяжения. На рис. 3 приводятся результаты расчета распределения натяжений при частотах $w = 60$ и $w = 30$. При частоте возбуждения $w = 60$ максимальная скорость возбуждения правого конца нити составляет $\max \dot{x}_{s=1} = Aw = 0.3\,c_0$. К моменту времени $t = 66000$ для этой частоты натяжения на длине 2/3 нити самоустанавливаются и скорости элементов нити на этой длине равны нулю, колебательный процесс продолжается на длине 1/3 от возбуждаемого конца, рис. 3а. При уменьшении частоты заметить этот эффект можно только через продолжительное время или с увеличением коэффициента m, входящего в физическое соотношение (2). При частоте $w = 30$ через определенное время колебания распространяются только до половины нити от возбуждаемого конца, а на другой половине имеем установившиеся значения натяжений. Величины установившихся натяжений практически не зависят от частот возбуждения, так для $w = 30$ и до $w = 60$ значения натяжений составляют $N = 0.0045$.

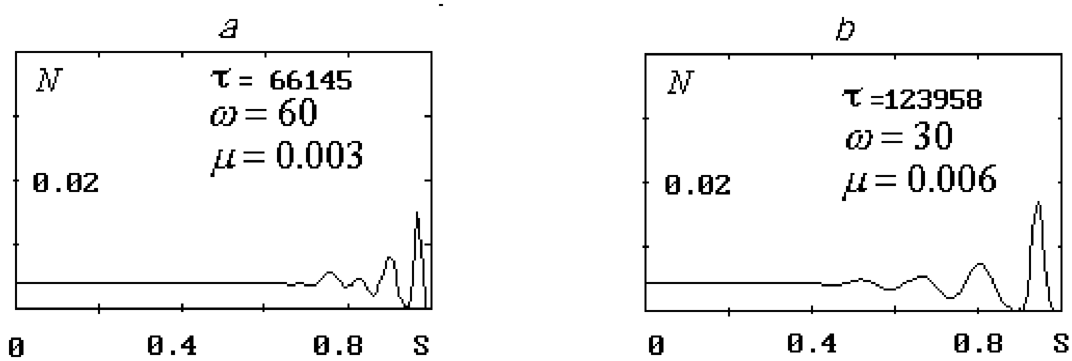


Рис.3 Распределения натяжений при больших частотах

Таким образом, при очень больших частотах возбуждения свободного конца (порядка $w = 30 \div 60$) в большей части нити колебания через определенное время затухают и остаются существенными только вблизи области возбуждения.

При обсуждении результатов, член-корреспондент РАН Ильгамов М.А. заметил, что такую аналогию можно встретить при бурении на больших глубинах (со временем вертикальное колебание трубы затухает в глубине бурения).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00234).

Список использованной литературы

1. Ильгамов М.А., Ридель В.В. Режимы разрывных колебаний в абсолютно гибкой нити//ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 343, №4, с.478-481.
2. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Из-во физико-матем. литературы. М.: 1961. - 400 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. Наука. М.: 1965. - 560 с.

Поступила в редколлегию 01.05.2001 г.