УДК 539.3

А. С. ГОЛЬЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, Донецкий Нац. ун-т

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО НАГРЕТЫХ ОРТОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Решена задача термоупругости для ортотропных сферических оболочек, нагреваемых источником тепла в виде линии. Использован метод фундаментальных решений. Предполагалось линейное распределение тепла по толщине оболочки и конвективный теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Исследовано влияние условий теплообмена на поведение внутренних силовых факторов.

Задачи термоупругости для локально нагретых элементов тонкостенных оболочечных конструкций являются весьма актуальными [1]. Так, изотропная сферическая оболочка, находящаяся в условиях симметричного теплообмена и нагреваемая источником тепла в форме линий, рассмотрена в [2]. В указанной работе получены формулы, определяющие тепловые напряжения, однако численного исследования не проведено. В данной статье решена задача термоупругости для локально нагретой ортотропной сферической оболочки, находящейся в условиях произвольного теплообмена.

Рассмотрим тонкую ортотропную сферическую оболочку толщиной $2h$, находящуюся в тепловом контакте с внешней средой нулевой температуры. Отнесем оболочку к ортогональной системе координат $x_i \left(i=\overline{1,3}\right)$, оси которой совпадают с главными направлениями ортотропии. Используем безразмерные координаты, определенные с точностью до полутолщины оболочки h. Будем предполагать, что нагрев происходит в локальной области, размеры которой намного меньше характерного размера рассматриваемой оболочки. Край оболочки достаточно далеко удален от места нагрева.

Нагрев оболочки будем моделировать распределением источников тепла объемной плотности $W_0(x_1,x_2,x_3)$ по области локального нагрева. Предполагаем, что по толщине оболочки источники тепла распределены равномерно.

Для определения локального термоупругого состояния используем уравнения напряженных состояний с большим показателем изменяемости, совпадающие с уравнениями теории пологих оболочек [3]. Будем учитывать линейное распределение температуры по толщине оболочки и конвективный теплообмен с внешней средой по закону

Ньютона. Тогда уравнения теплопроводности ортотропных сферических оболочек будут иметь следующий вид [4, 5]:

$$\Delta_l T_1 - m_1 T_1 - m_3 T_2 = -W_1; \quad \Delta_l T_2 - 3(1+m_1)T_2 - 3m_2 T_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_l = l_1 \frac{\P^2}{\P x_1^2} + l_2 \frac{\P^2}{\P x_2^2}; \quad l_1 = \frac{l_{11}}{l_{33}}; \quad l_2 = \frac{l_{22}}{l_{33}}; \quad m_{1,2} = \frac{1}{2}\left(Bi^+ \pm Bi^-\right);$$

$$m_3 = m_2 - 2k; \quad W_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2l_{33}} \int_{-1}^{1} W_0(x_1, x_2, x_3)dx_3;$$

T_1, T_2 - интегральные характеристики температуры, средняя температура и температурный момент; l_{11}, l_{22}, l_{33} - главные коэффициенты теплопроводности; k -кривизна оболочки; $Bi^{\pm}$ - критерий Био на поверхностях $x_3 = \pm 1$; W_1 - интегральная плотность источников тепла.

Для определения внутренних силовых факторов в качестве исходных используем уравнения термоупругости ортотропных сферических оболочек, основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява. Они включают следующие системы уравнений [6].

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} - k(N_1 + N_2) = 0, \quad (2)$$

где N_1, N_2, S - нормальные и касательное усилия; M_1, M_2, H - изгибающие и крутящий моменты.

Геометрические соотношения

$$e_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + kU_3; \quad e_2 = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + kU_3; \quad e_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2};$$

$$k_1 = -\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2}; \quad k_2 = -\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2}; \quad k_{12} = -\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3)$$

Здесь U_i $\left(i = \overline{1,3}\right)$ - перемещения точек срединной поверхности; e_1, e_2, e_{12} и k_1, k_2, k_{12} - компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности.

Уравнения физического закона

$$N_1 = B_1(e_1 + n_2 e_2) - b_1 T_1; \quad N_2 = B_2(n_1 e_1 + e_2) - b_2 T_1;$$

$$M_1 = D_1(k_1 + n_2 k_2) - b_1^0 T_2; \quad M_2 = D_2(n_1 k_1 + k_2) - b_2^0 T_2; \qquad (4)$$

$$S = 2Ge_{12}; \quad H = 4Gk_{12}/3,$$

где

$$B_1 = 3D_1 = kB; \quad B_2 = 3D_2 = B/k; \quad B = 2/(1 - n_1 n_2);$$

$$b_i = 3b_i^0 = B_i c_i \ \ (i = 1,2); \quad c_1 = a_1 + n_2 a_2; \quad c_2 = n_1 a_1 + a_2;$$

$$G = G_{12}/E; \quad E = \sqrt{E_1 E_2}; \quad k = \sqrt{E_1 / E_2};$$

E_1, E_2 и G_{12} - модули Юнга и модуль сдвига; n_1, n_2 и a_1, a_2 - коэффициенты Пуассона и температурные коэффициенты линейного расширения для главных направлений. Усилия в соотношениях (2) и (4) определены с точностью до множителя Eh, моменты - с точностью до множителя Eh^2.

Решение поставленной задачи дается формулой свертки

$$\mathbf{P}(\vec{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\vec{r} - \vec{t}) W_1(\vec{t}) d\Omega. \qquad (5)$$

Здесь $\mathbf{P}$ - внутренние силовые факторы; $\mathbf{E}$ - силовые компоненты фундаментального решения задачи термоупругости для сферической оболочки; Ω - область локального нагрева; $\vec{r}$ и $\vec{t}$ - вектора текущей точки и точки интегрирования.

Силовые компоненты фундаментального решения термоупругости найдены в работе [7], где рассмотрена ортотропная сферическая оболочка, под действием сосредоточенного источника тепла. Сосредоточенное температурное воздействие в этом случае моделируется с помощью d-функции Дирака и правая часть уравнений теплопроводности (1) имеет вид

$$W_1(x_1, x_2) = W_1^* d(x_1, x_2), \qquad (6)$$

где $d(x_1, x_2)$ - двухмерная дельта-функция Дирака; W_1^* - мощность интегрального источника тепла.

Фундаментальное решение термоупругости для ортотропной сферической оболочки найдено методом двухмерного интегрального преобразования Фурье. Силовые компоненты этого решения P_i $(i = \overline{1,6})$ ($P_1 = N_1$, $P_2 = N_2$, $P_3 = S$, $P_4 = M_1$, $P_5 = M_2$, $P_6 = H$) записываются в полярной системе координат r, j следующим образом:

$$P_i(r, j) = \frac{W_1^*}{p^2} \sum_{n=0}^{\infty} e_{ni} f_{ni}(j) \int_0^{p/2} \left\{ \frac{1}{p_1(q) l^2(q)} \sum_{m=1}^{4} R_{mni}(r, q) \sum_{j=1}^{4} A_{mj}(q) Q_{ij}(q) - \right.$$

$$\left. - g_i Y_{ni}(r, q) \right\} f_{ni}(q) dq \quad (i = \overline{1,6}). \qquad (7)$$

Здесь

$$e_{0i} = 1, \quad e_{ni} = 2 \ \left(n \geq 1,\ i = 1,2,4,5\right); \quad e_{ni} = 2 \quad \left(i = 3,6\right);$$

$$g_1 = b_1; \quad g_2 = b_2; \quad g_3 = g_6 = 0; \quad g_4 = b_1^0; \quad g_5 = b_2^0;$$

$$f_{ni}(j) = \cos 2nj \quad (i = 1,2,4,5); \qquad f_{ni}(j) = \sin(2n+1)j \quad (i = 3,6);$$

$$R_{1ni}(r,q) = \operatorname{Re} G_{n,n}\left(\sqrt{i}e(q)r\right) \ \ (i = 1,2,4,5);$$

$$R_{2ni}(r,q) = \frac{-1}{e^2(q)} \operatorname{Im} G_{n,n}\left(\sqrt{i}e(q)r\right) \ \ (i = 1,2,4,5);$$

$$R_{3ni}(r,q) = G_{n,n}\left(a_1(q)r\right), \quad R_{4ni}(r,q) = G_{n,n}\left(a_2(q)r\right) \ \ (i = 1,2,4,5);$$

$$R_{1ni}(r,q) = \operatorname{Re} G_{n+1,n+1}\left(\sqrt{i}e(q)r\right) \ \ (i = 3,6);$$

$$R_{2ni}(r,q) = \frac{-1}{e^2(q)} \operatorname{Im} G_{n+1,n+1}\left(\sqrt{i}e(q)r\right) \ \ (i = 3,6);$$

$$R_{3ni}(r,q) = G_{n+1,n+1}\left(a_1(q)r\right), \quad R_{4ni}(r,q) = G_{n+1,n+1}\left(a_2(q)r\right) \ \ (i = 3,6);$$

$$Y_{ni}(r,q) = J_{n1}(r,q) + 3(1+m_1)J_{n2}(r,q) \ \ (i = 1,2); \quad Y_{n3}(r,q) = 0;$$

$$Y_{ni}(r,q) = -3m_2 J_{n2}(r,q) \ \ (i = 4,5); \quad Y_{n6}(r,q) = 0;$$

$$J_{n1}(r,q) = \frac{1}{l(q)a_3^2(q)}\left[a_1^2(q)G_{n,n}\left(a_1(q)r\right) - a_2^2(q)G_{n,n}\left(a_2(q)r\right)\right];$$

$$J_{n2}(r,q) = \frac{1}{l^2(q)a_3^2(q)}\left[G_{n,n}\left(a_2(q)r\right) - G_{n,n}\left(a_1(q)r\right)\right]; \quad a_i^2(q) = \frac{b_i}{l(q)} \ \ (i = 1,2);$$

$$a_3^2(q) = a_1^2(q) - a_2^2(q); \quad l(q) = l_1 \cos^2 q + l_2 \sin^2 q;$$

$$b_{1,2} = \frac{1}{2}\left\{3 + 4m_1 \ \mathbf{m} \sqrt{(3+4m_1)^2 - 12\left(m_1 + m_1^2 - m_2 m_3\right)}\right\};$$

$G_{n,m}(z)$ - специальная функция [8], по своим свойствам подобная функции Макдональда; $A_{mj}(q)$ - рациональные выражения от переменных $a_1^2(q)$, $a_2^2(q)$, $e^4(q)$; $Q_{ij}(q)$, $p_1(q)$, $e^4(q)$ - тригонометрические полиномы по $\sin q$ и $\cos q$, коэффициенты которых зависят от геометрических, механических и теплофизических параметров оболочки. Поскольку радиальная координата r входит лишь в аргумент специальной функции $G_{n,m}(z)$, то асимптотические свойства силовых компонент (7) будут определяться асимптотическим поведением этой функции при $z \to 0$. Так, логарифмической особенностью обладают мембранные усилия N_1 и N_2. Остальные внутренние силовые факторы не имеют особенностей в начале координат.

В качестве примера рассмотрена сферическая оболочка, нагреваемая источниками тепла единичной мощности $\left(W_1\left(\vec{t}\right)=1^0 K\right)$, расположенными на отрезке прямой длиной $2a$ $(a=3)$. Отрезок располагается на оси x_1 с центром в начале координат. Материалом оболочки является стеклопластик косоугольной намотки, обладающий сильной анизотропией ($k=1{,}935$; $G=0{,}2067$; $n_1=0{,}2798$; $a_1=0{,}7\cdot 10^{-5}K^{-1}$; $a_2=3{,}8\cdot 10^{-5}K^{-1}$; $l_1=2{,}306$; $l_2=1$). При определении силовых компонент фундаментального решения (7) удерживалось десять членов бесконечного ряда, что вполне достаточно для проведения инженерных расчетов.

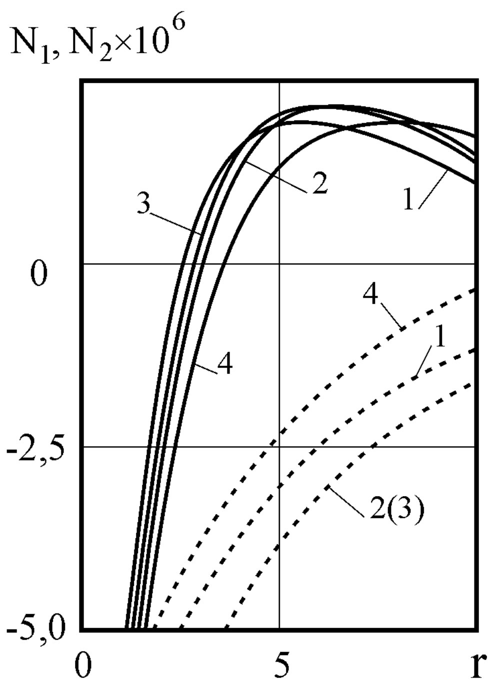

Рис. 1

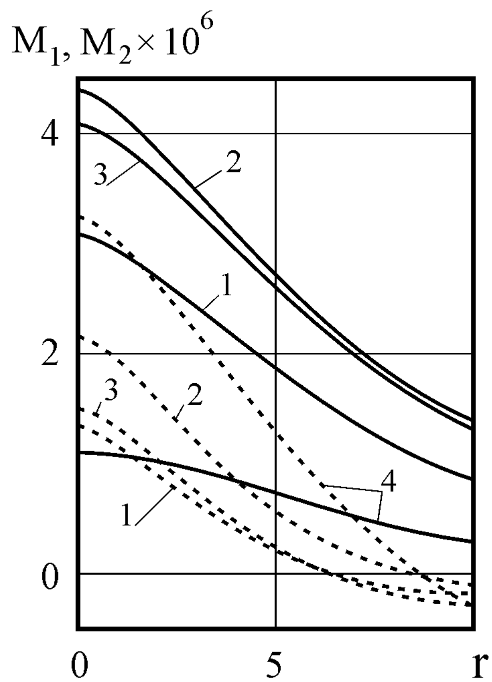

Рис. 2

Рассчитывались значения внутренних силовых факторов для точек, лежащих на оси x_2 ($r=x_2$; $j=p/2$). Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2, где значения мембранных усилий N_1, N_2 даны с точностью до параметра Eh, изгибающих моментов M_1, M_2 - с точностью до параметра Eh^2, радиальной координаты r - с точностью до h. Сплошными линиями на рис. 1 и 2 показаны графики для усилия N_1 и момента M_1, штриховыми линиями на этих же рисунках показаны графики для усилия N_2 и момента M_2. Рассматривались три случая теплообмена: симметричный теплообмен, когда величина теплообмена на верхней и нижней боковых поверхностях оболочки одинакова ($Bi^{+} = Bi^{-} = 0{,}1$; кривые, помеченные цифрой 1); верхний односторонний теплообмен, когда тепловой контакт происходит лишь на верхней боковой поверхности оболочки, а нижняя теплоизолирована ($Bi^{+} = 0{,}1$; $Bi^{-} = 0$; кривые, помеченные цифрой 2); нижний односторонний теплообмен, когда тепловой контакт происходит лишь на нижней боковой поверхности оболочки, а верхняя теплоизолирована ($Bi^{+} = 0$; $Bi^{-} = 0{,}1$; кривые, помеченные цифрой 3). Графики, отмеченные цифрой 4, соответствуют случаю симметричного теплообмена, когда главные оси ортотропии повернуты на угол $p/2$. Графики для мембранного усилия N_2 в случае верхнего и нижнего одностороннего теплообмена не различимы и показаны одной кривой.

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что значения внутренних силовых факторов при симметричном теплообмене значительно отличаются от случаев верхнего и нижнего теплообмена, которые близки между собой (исключая зависимости для изгибающего момента M_2). При повороте главных осей ортотропии поведение внутренних силовых факторов существенно изменяется. Таким образом, можно заключить, что при расчете локального термоупругого состояния в тонкостенных оболочечных конструкциях необходимо учитывать анизотропные свойства материала и характер теплообмена с окружающей средой.

Список использованной литературы

1. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований) / Москва. Авиационный ин-т. – Москва, 1987. – 193 с. – Деп. в ВИНИТИ, 1988, В – 88.1222.
2. Хапко Б. С., Заболотный В. П. Тепловые напряжения в сферической оболочке, обусловленные источником тепла в форме линий // Обобщенные функции в термоупругости: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1980. – С. 198-202.
3. Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. - Киев: А.С.К., 1998. - 387 с. (Механика композитов: В 12 т. Т. 7)
4. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наук. думка, 1976. - 311 с.
5. Швец Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига // Прикл. механика. - 1971. - **7**, №10. - С. 121-125.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. - М.: Наука, 1974. - 448 с.
7. Шевченко В. П., Гольцев А. С. Задача термоупругости для ортотропных сферических оболочек, нагреваемых сосредоточенными источниками тепла // Теорет.

и прикладная механика: Научно-техн. сб. - Харьков: Основа, 2000. - Вып. 31. - С. 103-108.
8. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. - Донецк: ДонГУ, 1980. - 128 с.

Поступила в редколлегию 05.08.2001 г.