УДК 532.5

Ю. Б. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

О ВЕЩЕСТВЕНОСТИ СПЕКТРА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БАССЕЙНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

В работе рассматривается вопрос о вещественности точечного спектра самосопряженного операторного пучка, возникающего при определении свободных колебаний вращающейся двухслойной жидкости в ограниченном бассейне переменной глубины. Доказывается, что все собственные значения пучка, если они существуют, вещественны.

При построении самосопряженного операторного пучка в качестве исходной будем рассматривать дифференциальную краевую задачу для системы уравнений теории мелкой воды [1 – 2] в той постановке, которая предложена в работе [3].

Построение самосопряженных операторный коэффициентов пучка. Для дифференциального оператора L_0 с переменным коэффициентом $H(x,y)$,

$$L_0 u = -\left(\frac{\partial}{\partial x} H(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} H(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right), \qquad (x,y)\in G\setminus\Gamma,$$

с областью определения

$$\mathsf{D}_0 = \left\{ u \in C^2(\overline{G}), \quad \int_G u\,dG = 0, \quad H\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{на } \Gamma,\ 0 < c \le H(x,y) \le C \right\},$$

являющегося на D_0 симметрическим и полуограниченным, построим его самосопряженное расширение [4] (по Фридрихсу) с областью определения $\mathsf{D}(L)$, то есть $L:\mathsf{D}(L)\to L_2(G)$, $\mathsf{D}(L)\subset H^1(G)$. Дифференциальному оператору

$$M_0 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} H(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} H(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (x,y)\in G\setminus\Gamma,$$

в случае кусочно-гладкого коэффициента $H(x,y)$, ставим в соответствие кососимметрический непрерывный оператор $M : H^1(G)\to L_2(G)$. На векторном гильбертовом пространстве $\mathsf{H}^1(G) = H^1(G)\oplus H^1(G)$ строим самосопряженный полуограниченный оператор L как матрицу с коэффициентами – операторам

$$\mathsf{L}(H) = \begin{pmatrix} L(H) & 0 \\ 0 & L(H) \end{pmatrix}$$

и ограниченный самосопряженный оператор

$$\mathbf{M}(H)=\begin{pmatrix} 0 & -M(H) \\ M(H) & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & M^{*}(H) \\ M(H) & 0 \end{pmatrix},$$

действующие на векторном гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(G)= = L_2(G)\oplus L_2(G)$.

Определим оператор $L(H)$ как $L(H)= l\,\mathbf{L}(H)-a\,\mathbf{M}(H)$, где a – вещественный коэффициент.

Дифференциальной краевой задаче сопоставим систему уравнений

$$\begin{gathered} L\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right)\tilde{h}^{(1)}+\sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}L(H_2)\tilde{h}^{(2)}+l\left(a^2-l^2\right)\tilde{h}^{(1)}=0 \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}L(H_2)\tilde{h}^{(1)}+dr\,L(H_2)\tilde{h}^{(2)}+l\left(a^2-l^2\right)\tilde{h}^{(2)}=0, \end{gathered} \tag{1}$$

где l – спектральный параметр, а $\tilde{h}^{(1)}$, $\tilde{h}^{(2)}$ принадлежат $D(\mathbf{L})\subset\mathbf{H}^1(G)$.

Определим оператор C, действующий в векторном гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(G)\oplus\mathbf{L}_2(G)$, как матрицу с коэффициентами операторами

$$C=\begin{pmatrix} L\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right) & \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}L(H_2) \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}L(H_2) & dr\,L(H_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (1) может быть записана как одно уравнение для самосопряженного операторного пучка

$$C(l)\tilde{h}+l\left(a^2-l^2\right)\tilde{h}=0. \tag{2}$$

Оператор L запишем в виде $L=lB-aM$, где

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{L}\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right) & \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2) \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2) & dr\,\mathbf{L}(H_2) \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} \mathbf{M}\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right) & \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{M}(H_2) \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{M}(H_2) & dr\,\mathbf{M}(H_2) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2) можно теперь записать в виде

$$\left(l^3E-l\left(B+a^2E\right)+aM\right)\tilde{h}=0. \tag{3}$$

Уравнение (3), определяющее свободные колебания двухслойной жидкости, обладает основными свойствами уравнения колебаний однородной жидкости, которое было рассмотрено в [5].

Вещественность собственных значений операторного пучка. Рассмотрим матрицу с самосопряженными операторными коэффициентами

$$B=\begin{pmatrix} \mathbf{L}\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right) & \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2) \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2) & dr\,\mathbf{L}(H_2) \end{pmatrix},$$

и докажем следующие её свойства.

Утверждение 1. Если самосопряженный операторный коэффициент $\mathbf{L}(H_1)$ матрицы B положительно определен, $\mathbf{L}(H_1)>>0$, а $\mathbf{L}(H_2)\geq 0$, то оператор B является самосопряженным, положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2(G)\oplus\mathbf{L}_2(G)$.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,x_2)^T$ – произвольный элемент, принадлежащий $D(B)=(D(\mathbf{L}),D(\mathbf{L}))$ – области определения оператора B. Тогда самосопряженность оператора B следует непосредственно из самосопряженности операторных коэффициентов симметричной матрицы B.

Вычислим (Bx,x) для любого $x\in D(B)$. Вектор Bx запишем в виде

$$Bx=\begin{pmatrix} \mathbf{L}\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right)x_1+\sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2)x_2 \\ \sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}\mathbf{L}(H_2)x_1+dr\,\mathbf{L}(H_2)x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(Bx,x)=\left(\mathbf{L}\left(H_1+\frac{r_1}{r_2}H_2\right)x_1,x_1\right)+2\sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}(\mathbf{L}(H_2)x_2,x_1)+dr\,(\mathbf{L}(H_2)x_2,x_2)=$$

$$=(\mathbf{L}(H_1)x_1,x_1)+\frac{r_1}{r_2}(\mathbf{L}(H_2)x_1,x_1)+2\sqrt{dr\,\frac{r_1}{r_2}}(\mathbf{L}(H_2)x_2,x_1)+dr\,(\mathbf{L}(H_2)x_2,x_2)=$$

$$=(\mathbf{L}(H_1)x_1,x_1)+\left(\mathbf{L}(H_2)\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}x_1+\sqrt{dr}x_2\right),\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}x_1+\sqrt{dr}x_2\right)\right).$$

Таким образом, $(Bx,x)=(\mathbf{L}(H_1)x_1,x_1)+(\mathbf{L}(H_2)h,h)$, где

$$h = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} x_1 + \sqrt{dr} x_2 .$$

Так как $\mathbf{L}(H_1) >> 0$, и $\mathbf{L}(H_2) \geq 0$, то из последнего равенства получаем $B >> 0$, что требовалось доказать.

Утверждение 2. Если $(\mathbf{L}(H)x, x) \geq |(\mathbf{M}(H)x, x)|$, $x \in D(\mathbf{L})$, то для любого $x = (x_1, x_2)^T \in D(B)$ имеет место неравенство

$$(B x, x) \geq |(M x, x)|.$$

Доказательство. Пусть $h_1 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} x_1 + \sqrt{dr} x_2$. Тогда для любого $x = (x_1, x_2)^T \in D(B)$ имеют место равенства

$$(Bx, x) = (\mathbf{L}(H_1)x_1, x_1) + (\mathbf{L}(H_2)h_1, h_1),$$
$$(Mx, x) = (\mathbf{M}(H_1)x_1, x_1) + (\mathbf{M}(H_2)h_1, h_1).$$

Так как $(\mathbf{L}(H_1)x_1, x_1) \geq |(\mathbf{M}(H_1)x_1, x_1)|$ и $(\mathbf{L}(H_2)h_1, h_1) \geq |(\mathbf{M}(H_2)h_1, h_1)|$, то справедливы следующие неравенства

$$(Bx, x) \geq |(\mathbf{M}(H_1)x_1, x_1)| + |(\mathbf{M}(H_2)h_1, h_1)| \geq$$
$$\geq |(\mathbf{M}(H_1)x_1, x_1) + (\mathbf{M}(H_2)h_1, h_1)| = |(Mx, x)|,$$

что требовалось доказать.

Утверждение 3. Собственные значения пучка для двухслойной жидкости

$$\left(l^3 E - l\left(B + a^2 E\right) + aM\right)x = 0, \tag{4}$$

могут быть только вещественны.

Доказательство. Для произвольного $x \neq 0$, в силу **Утверждений 1–2**, справедливы неравенства $(Bx, x) > 0$, $(Bx, x) \geq |(Mx, x)|$. Предположим, что x – нормированный собственный вектор пучка (4). Умножим скалярно уравнение (4) на этот вектор. Обозначим $l = (Bx, x)$, $m = (Mx, x)$. Тогда собственные значения пучка (4) являются корнями скалярного уравнения

$$l^3 - l\left(l + a^2\right) + a \cdot m = 0, \tag{5}$$

коэффициенты которого, в силу **Утверждений 1–2**, удовлетворяют неравенствам $l > 0$, $l \geq |m|$.

Покажем, что уравнение (5) имеет только вещественные корни; если $l > |m|$, то эти корни простые. Как известно [6], уравнение Кордано

$$l^3 + pl + q = 0 \tag{6}$$

имеет только вещественные корни, если его дискриминант $D = (p/3)^3 + (q/2)^2 \leq 0$; если $D < 0$, то все корни простые.

В уравнении (6) имеем $p \equiv -\left(l + a^2\right)$, $q \equiv a \cdot m$. Все корни этого уравнения будут вещественны, если выполнено неравенство $D \le 0$, то есть

$$-\frac{1}{27}\left(l + a^2\right)^3 + \frac{1}{4}a^2 \cdot m^2 \le 0,$$

которое эквивалентно при $l > 0$ неравенству

$$\frac{1}{4}\frac{a^2}{l} \cdot \frac{m^2}{l^2} \le \frac{1}{27}\left(1 + \frac{a^2}{l}\right)^3. \tag{7}$$

Обозначим $a^2 / l = t$, $m^2 / l^2 = a^2$, при этом $t \ge 0$, $a^2 \le 1$. Неравенство (7) запишется в виде

$$\frac{1}{4}a^2 t \le \frac{1}{27}\left(1 + t\right)^3.$$

Докажем неравенство

$$\frac{1}{4}t \le \frac{1}{27}\left(1 + t\right)^3, \tag{8}$$

из которого следует строгое неравенство

$$\frac{1}{4}a^2 t < \frac{1}{27}\left(1 + t\right)^3 \quad \text{при } a^2 < 1.$$

Неравенство (8) после раскрытия скобок и приведения подобных приводится к неравенству

$$t^3 + 3t^2 - \frac{15}{4}t + 1 \ge 0,$$

которое можно записать в виде

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \left(t + 4\right) \ge 0. \tag{9}$$

При $t \ge 0$ неравенство (9) очевидно, так как каждый из сомножителей не может быть отрицательным.

Следовательно, собственные значения пучка для двухслойной жидкости (4) могут быть только вещественными, что требовалось доказать.

Список использованной литературы

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.: ОГИЗ, 1947. – 928с.
2. Черкесов Л. В., Иванов В. А., Хартиев С. Н. Введение в гидродинамику и теорию волн. – Санкт-Петербург. Гидрометеоиздат, 1992. – 264с.
3. Иванов Ю. Б. Свободные колебания двухслойной жидкости во вращающемся бассейне переменной глубины. // Динамические системы. 1999. Вып. 15, с.50-59.
4. Рисс Ф., Сёкифальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. – 587с.

5. Иванов Ю. Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море. // Доп. НАН України. - 1999. - №7. - С.117-120.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. - 544с.

Поступила в редколлегию 28.05.2001 г.