содержать решения, оптимальные лишь при редко встречающихся реализациях. Более того, можно показать, что для каждого (непаретовского) слабого решения существует паретовский оптимум из P_1, имеющий “лучшее“ значение целевой функции. Поскольку постоянное решение находится (если оно существует) в паретовском множестве P_1, то учитывая вышеизложенное, множество P_1 целесообразно принять в качестве решения любой из рассматриваемых оптимизационных задач. Следует также отметить, что в худшем случае [3] множество P_1 может совпадать с множеством допустимых решений X. Поэтому лицу, принимающему решение, целесообразно предложить нескольких представителей паретовского множества P_1.

Список использованной литературы

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. Г.Е. Минца, А.Г. Яковлева / Под ред. Ю.В. Матиясевича. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – Изд-во МЭИ (СССР); «Техника» (НРБ), 1989. – 224 с.
3. Козіна Г.Л. Дослідження екстремальних задач на графах з інтервальними параметрами // Вісник Запорізького державного університету, 1999. - №1. – С. 63-68.
4. Kozina G.L., Perepelitsa V.A. Spanning Trees Problem: Solvability and Computational Complexite// Interval Computations, 1.- 1994. - P.42 – 50.
5. Yaman H. Karasan O.E. Mustafa O.P. Minimum Spanning The Problem with. Interval Data, Bilkent University, Department of Industrial Engineering, Techical Report 9909, July, 1999.

Поступила в редколлегию 12.05.2001 г.

УДК 619.8

Н.Н.КАНАЕВА, канд.физ.-мат. наук, В.В. МАТВЕЕВ , канд.физ.-мат. наук.
Крым. академия природоохран. и курорт. строительства

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА

На основе теории мажоризации для функций, вогнутых по Шуру, предложена методика определения экстремальных оценок вычислительной сложности модифицированного локального алгоритма

Оценка вычислительной сложности (ОВС) модифицированного локального алгоритма (МЛА) решения k-блочных дискретного программирования с N дополнительными ограничениями типа множественного выбора имеет вид:

$$E(\mathrm{B}_{\mathrm{k}}(n), \mathrm{J}_N(n)) = \sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{l_r^{(p)}}^{q} \tag{1}$$

Здесь $l_r^{(p)}$ – число переменных из дополнительного ограничения p блока r.

Определение 1. Ограничения вида

$$\sum_{j \in J_p} x_j \le n\,,\ J_{p_1} \cap J_{p_2} = \varnothing,\ p_1 \ne p_2;\ \bigcup_p J_p = \{1,2,\ldots,n\},\quad x_j \in \{0,1\} \tag{2}$$

$(n > 1,\quad n \in N)$ называются ограничениями множественного выбора.

Экстремальные значения ОВС МЛА на множестве всех k-блочных структур $\{\mathrm{B}_k(n\}$ с n переменными и множествах дополнительных ограничений многовариантного $\{\mathrm{J}_N(n)\}$ типа $(n > 1,\quad n \in N)$ являются решениями задач вида:

$$\sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{l_r^{(p)}}^{q} \to extr$$

при ограничениях: $\sum_{r,p} l_r^{(p)} = n,$

$$l_r^{(p)} \ge 1,\quad l_r^{(p)} \in Z,\quad p = 1,\ldots,N;\quad r = 1;2,\ldots,K \tag{3}$$

Будем рассматривать полностью невырожденный случай, когда каждое дополнительное ограничение включает переменные из всех k блоков , т.е. $n \ge kN$ (3).

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобятся следующие определения и теоремы.

Определение 2. Пусть $x, y \in R^n$. Говорят, что x мажорируется y [1] (или y мажорирует x), и пишут $x \prec y$, если

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \le \sum_{i=1}^{k} y_{[i]},\quad k = 1,\ldots,n-1,\ \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Запись $x_{[i]}$ означает, что компоненты вектора x упорядочены по невозрастанию.

Наибольший и наименьший векторы обозначают u и v: $u \prec x \prec v$.

Определение 3. [1]. Вещественная функция φ, определенная на множестве $A \subset R^n$, называется *вогнутой по Шуру* (S-*вогнутой*) на A, если

$$x \prec y \quad на \quad A \Rightarrow \varphi(x) \ge \varphi(y).$$

Теорема 1. [1] (критерий I S-вогнутости). *Пусть $I \subset R$-открытый интервал, и пусть $\varphi : I^n \to R$-непрерывно дифференцируемая функция. Для S-вогнутости функции φ на множестве I^n необходимо и достаточно, чтобы*

1)функция была симметрической на I^n, (4)

2)Функция $\varphi_{(i)}(z)$ монотонно не убывала по $i=1,\dots,n$ для всех $z \in D \cap I^n$.

Критерий II S-вогнутости [1] *: функция φ является S-вогнутой на I^n тогда и только тогда, когда выполняется условие (4) и, кроме того, для всех $i \ne j$*

$$(z_i - z_j)(\varphi_{(i)}(z) - \varphi_{(j)}(z)) \le 0 \text{ при всех } z \in I^n. \; \left(\varphi_{(k)}(z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_k}\right).$$

Утверждение 1 [1]**.** Если множество $B = \left\{x: \quad x \in A \quad и \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = n\right\}$

не пусто, то его наименьший элемент $u = (n, n, \dots, n)/N$; и, если существует наибольший элемент v, то

$$v = (m, m, \dots, n - (N-1)m), где\ m = \min_i x_i.$$

Это означает, что для любого x из B справедливо: $u \prec x \prec v$.

Следствие 1. $(n, n, \dots, n)/N \prec x \prec (1, \dots, 1, n - N + 1)$.

В случае целочисленных векторов u и v имеют вид

$$u = \left(\underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} x_p / N\right], \left[\sum_{k=1}^{N} x_p / N\right], \dots}_{N-R}, \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} x_p / N\right] + 1, \dots, \left[\sum_{k=1}^{N} x_p / N\right] + 1}_{R} \right),$$

$$R = \sum_{p=1}^{N} x_p - N\left[\sum_{p=1}^{N} x_p / N\right], \; v = \left(\sum_{p=1}^{N} x_p - N + 1, 1, \dots, 1\right)$$

Лемма 1. *Решение оптимизационной задачи*

$$f1(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{p=1}^{N} x_p = n, \quad x_p \geq 1, \quad p = 1, ..., N,$$

следующее: $x_p = 1 \quad, p = 1, ..., N-1; \quad x_N = n - N + 1,$

$$\min f1(x_1, x_2, ..., x_N) = 2^{N-1} \sum_{q=0}^{n} C_{n-N+1}^{q} .$$

Доказательство. Так как функция $f1(x_1, x_2, ..., x_N) = \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q}$ S-вогнута [2], то из соотношения $x\, \mathbf{p} \left(\sum_{p=1}^{N} x_p - N + 1, 1, ..., 1 \right)$ следует, что $\prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \geq 2^{N-1} \sum_{q=0}^{n} C_{n-N+1}^{q}$. Лемма доказана.

Тогда,

$$\left(\sum_{r=1}^{K} \left(2^{N-1} \sum_{q=0}^{n} C_{n_r - N+1}^{q} \right) \right) \geq 2^{N-1} \left(\sum_{r=1}^{K} \sum_{q=0}^{n} C_{n_r - N+1}^{q} \right) \geq$$

$$\geq 2^{N-1} \left((N-R) \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\left(\sum_{r=1}^{K} n_r - k(N-1) \right) / k \right]} + R \cdot \sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\left[\left(\sum_{r=1}^{K} n_r - k(N-1) \right) / k \right] + 1} \right)$$

(это следует из S-выпуклости функции $\prod_{r=1}^{K} \sum_{q=0}^{n} C_{n_r}^{q}$ [2] и соотношения $(\mathrm{n}', \mathrm{n}', ..., \mathrm{n}')/\mathrm{N}\ \mathbf{p}\ \mathrm{x}$, где $n' = \sum_{r=1}^{K} (n_r - N + 1) = n - k \cdot (N-1)), \left(\sum_{r=1}^{K} n_r = n \right)$.

Для нахождения максимума $E(\mathrm{B}_{\mathrm{k}}(n), \mathrm{J}_N(n))$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Решение оптимизационной задачи*

$$f1(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \to \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{p=1}^{N} x_p = n, \quad x_p \geq 1, \quad p = 1, \dots, N,$$

следующее: $\qquad x_r = n/N, \quad r = 1, \dots, N,$

причем $\qquad max\, f1(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(\sum_{q=0}^{n} C_{n/N}^{q} \right)^{N}.$

Доказательство. Так как функция $f1(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q}$ -S-вогнута, то из условия $x\, \mathbf{f}\, (n/N, \dots, n/N)$ следует, что $\prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \leq \left(\sum_{q=0}^{n} C_{n/N}^{q} \right)^{N}$. Лемма доказана.

Очевидно, что для целочисленных векторов x выполняется неравенство $\prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \leq \left(\sum_{q=0}^{n} C_{[n/N]}^{q} \right)^{N-R} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{[n/N]+1}^{q} \right)^{R}$.

С учетом S-выпуклости функции $\mathrm{f2}(x_1, x_2, \dots, x_N) = \prod_{p=1}^{N} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \right)^{L}$ и соотношения $x\, \mathbf{p} \left(\sum_{p=1}^{N} x_p - N + 1, 1, \dots, 1 \right), \left(\sum_{p=1}^{N} x_p = n_r \right)$ получим оценку сверху $\sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \sum_{q=0}^{n} C_{x_p}^{q} \leq \sum_{r=1}^{K} \left(\sum_{q=0}^{n} C_{n_r/N}^{q} \right)^{N} \leq 2^N (K-1) + \left(\sum_{q=0}^{n} C^{q}_{\sum_{r=1}^{K} n_r/N - N + 1} \right)^{N}$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. В полностью невырожденном случае ($n^3 kN$)

$$2^{N-1} \left((N-R) \sum_{q=0}^{n} C_{[(n-k(N-1))/k]}^{q} + R \cdot \sum_{q=0}^{n} C_{[(n-k(N-1))/k]+1}^{q} \right) \leq E(\mathrm{B_k}(n), \mathrm{J}_N(n)) \leq$$

$$\leq 2^{N}(K-1)+\left(\sum_{q=0}^{n} C_{n/N-N+1}^{q}\right)^{N}.$$

Определим экстремальные значения ОВС МЛА для случая дополнительных ограничений одновариантного типа $(n=1)$.

ОВС МЛА решения k-блочных ДП с N дополнительными ограничениями одновариантного типа имеет вид:

$$E(\mathrm{B}_{\mathrm{k}}(n),\mathrm{J}_{N}(1))=\sum_{r=1}^{K}\prod_{p=1}^{N}\left(1+l_{r}^{(p)}\right)$$

Лемма 3. *Функция* $j(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$ *является S-вогнутой на* R_{+}^{n}**.**

Доказательство.1) Функция j - симметрическая. 2) Найдем частныепроизводные рассматриваемой функции

$$j_{(k)}(x)=\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}(1+x_i),\ j_{(l)}(x)=\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq l}}^{n}(1+x_i).$$

Рассмотрим разность:

$$(x_k-x_l)\left(j_{(k)}(x)-j_{(l)}(x)\right)=(x_k-x_l)(x_l-x_k)\prod_{\substack{i=1,\\ i\neq l, i\neq k}}^{n}(1+x_i)\leq 0,$$

S-вогнутость функции $j(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$ по критерию II доказана.

С учетом S-вогнутости функции $j(x)=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$,

из условия $(\mathrm{n},\mathrm{n},\ldots,\mathrm{n})/\mathrm{N}\ \mathbf{p}\ \mathrm{x}\ \mathbf{p}\ (1,\ldots,1,\mathrm{n}-\mathrm{N}+1)$ следует справедливость неравенства $2^{N-1}(n-N+2)\leq\prod_{p=1}^{N}\left(1+l^{(p)}\right)\leq\left(1+\dfrac{n}{N}\right)^{N}$.

С учетом целочисленности координат наименьшего вектора из соотношения $\left(\underbrace{[n/N],[n/N],\ldots}_{\mathrm{N-R}},\underbrace{[n/N]+1,[n/N]+1}_{\mathrm{R}}\right)\mathbf{p}\ \mathrm{x}\ \mathbf{p}\ (1,\ldots,1,\mathrm{n}-\mathrm{N}+1)$

следует : $2^{N-1}(n-N+2)\leq\prod_{p=1}^{N}\left(1+l^{(p)}\right)\leq\left(1+\left[\dfrac{n}{N}\right]\right)^{N-R}\left(2+\left[\dfrac{n}{N}\right]\right)^{R}$, где R- остаток от деления n на N: $R = n - N \cdot [n/N]$. .

Так как $E(\mathrm{B_k}(n), \mathrm{J}_N(1)) = \sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \left(l_r^{(p)} + 1\right)$, то оценку снизу получим, суммируя $\sum_{r=1}^{K} 2^{N-1}(n_r - N + 2) = 2^{N-1}(n - k(N-2))$, т.е.

$$\sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \left(l_r^{(p)} + 1\right) \geq 2^{N-1}(n - k(N-2)).$$

Функция $\mathrm{f3}(x_1, x_2, ..., x_N) = \sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \left(l_r^{(p)} + 1\right)$ - S-выпуклая [2],

$x \prec \left(n - k(N-1), \underbrace{N, ..., N}_{k-1}\right)$, оценка сверху

$$\sum_{r=1}^{K} \prod_{p=1}^{N} \left(l_r^{(p)} + 1\right) \leq 2^N (k-1) + \left(1 + \frac{n - k(N-1)}{N}\right)^N.$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. В полностью невырожденном случае ($n \geq kN$)

$$2^{N-1}(n - k(N-2)). \leq E(\mathrm{B_k}(n), \mathrm{J}_N(1)) \leq 2^N (k-1) + \left(1 + \frac{n - k(N-1)}{N}\right)^N.$$

Полученные оценки позволяют определить k-блочные структуры, соответствующие «наилучшему» и «наихудшему» поведению МЛА на указанном классе задач.

Список использованной литературы

1. Маршалл А.Б., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения -М.: Мир.-1983.-576с.
2. Щербина О.А., Канаева Н.Н. Об экстремальных свойствах сумм биномиальных коэффициентов // Динамические системы. Вып.16.- Симферополь: КФТ.-2000.-С.192-197.

Поступила в редколлегию 12.07.2001 г.