УДК 519.68(001.4)

Г.Л. КОЗИНА, канд. физ.-мат. наук, И.В. КОЗИН, канд. физ.-мат. наук,
Запорожский нац. техн. ун-т

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА ГРАФАХ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрим классические оптимизационные задачи на графах – задачу о минимальном остовном дереве, задачу о совершенных паросочетаниях, задачу коммивояжера – при условии, что числовые параметры задачи не являются постоянными, а изменяются в некоторых интервалах [1] независимо друг от друга. Можно ли предложить что-либо приемлемое в качестве решения оптимизационной задачи при заданной неопределенности? Оказывается, что даже в такой ситуации оптимизационная задача может иметь единственное оптимальное решение, т.е. решение, остающееся оптимальным при любых значениях числовых параметров из заданных интервалов. Такая ситуация возникает, например, когда все интервалы изменения параметров имеют одинаковую ширину. В более общем случае решением оптимизационной задачи является некоторое подмножество множества допустимых решений. Существует несколько подходов к определению решения оптимизационной задачи при неопределенности [2-5]. Описанию двух из них посвящена данная статья.

1. Математическая постановка задачи. Пусть задан граф $G=(V,E)$, где V - множество вершин, E- множеством ребер. Перенумеруем все ребра графа числами от *1* до m. Пусть в некоторой реализации $t\in T$ параметров задачи вес ребра с номером i равен $c_i(t)$, при этом $c_i \le c_i(t) \le \overline{c}_i$

Допустимое решение оптимизационной задачи x представляет собой набор ребер $E_x \subseteq E$ и может быть описано с помощью множества N_x, содержащего номера ребер, принадлежащих решению x. Допустимым решением задачи о минимальном остовном дереве является остовное дерево, задачи о совершенных паросочетаниях - совершенное паросочетание, задачи комми-вояжера – гамильтонов цикл.
На множестве допустимых решений X определим целевую функцию так, что для каждой реализации $t\in T$ имеем:

$$x \to c_x(t), \quad c_x(t)=\sum_{i\in N_x} c_i(t) \tag{1}$$

Заметим, что

$$_x(t)\in\left[\sum_{i\in N_x}\underline{c_i},\sum_{i\in N_x}\overline{c_i}\right]=\left[\underline{c_i},\overline{c_i}\right]=c_x \tag{2}$$

Среди допустимых решений *x Î X* требуется найти решение, имеющее минимальное значение целевой функции $c_x(t)$. Очевидно, что для каждой реализации t оптимальные решения, вообще говоря, будут различны.

Введем порядок R_1 на множестве допустимых решений X. Допустимое решение y “лучше” допустимого решения x, если

$$c_y \neq c_x\,,\ \underline{c_y} \leq \underline{c_x} \quad \text{и} \quad \overline{c_y} \leq \overline{c_x} \tag{3}$$

Допустимое решение x называется *паретовским оптимумом согласно порядка* R_1, если для него не существует “лучшего“ решения. Все паретовские оптимумы согласно порядка R_1 образуют паретовское множество P_1.

Рассмотрим более строгий порядок R_2 на множестве допустимых решений X. Допустимое решение y “строго лучше”

$$\overline{c_y} \leq \underline{c_x} \tag{4}$$

допустимого решения x, если

Допустимое решение x называется *паретовским оптимумом согласно порядка* R_2, если для него не существует “строго лучшего“ решения. Все паретовские оптимумы согласно порядка R_2 образуют паретовское множество P_2.

Как множество P_1, так и множество P_2 состоят из несравнимых решений, согласно порождающим их порядкам. При этом очевидно, что множество P_2 содержит множество P_1.

Введем также понятия постоянного и слабого решений.

Допустимое решение x называется *постоянным*, если оно оптимально, т.е. имеет минимальное значение целевой функции $c_x(t)$, для любой реализации t (∀*t Î T*).

Допустимое решение x называется *слабым*, если оно оптимально, т.е. имеет минимальное значение целевой функции $c_x(t)$, для некоторой реализации t (∃ *t Î T*). Множество всех слабых решений обозначим через W.

Очевидно, что если существует постоянное решение, то его можно принять в качестве решения оптимизационной задачи при неопределенности. Если же постоянного решения не существует, на роль решения задачи могут претендовать описанные выше множества P_1, P_2 и W.

2. Основные результаты. Рассмотрим свойства множеств P_1, P_2 и W.

Теорема 1. *Для любой из рассмотренных выше оптимизационных задач паретовское множество решений* P_1 *является подмножеством множества слабых решений* W.

Доказательство. Пусть x – паретовский оптимум из P_1. Докажем, что существует реализация t параметров, при которой x имеет минимальное значение целевой функции $c_x(t)$.

Возьмем следующую реализацию весов t: ребрам, принадлежащим решению x, припишем веса, соответствующие их нижним границам, а всем остальным ребрами графа – веса, соответствующие их верхним границам. Тогда:

$$c_x(t) = \underline{c_x} \tag{5}$$

Покажем, что при этой реализации весов ребер графа выбранное паретовское решение $x \hat{I} P_1$ является минимальным и, следовательно, принадлежит множеству слабых решений W. Доказательство проведем от противного. Пусть существует решение $y \hat{I} X$, имеющее меньший вес при выбранной реализации:

$$c_y(t) < c_x(t) \tag{6}$$

Для допустимого решения y имеем (см. (1)):

$$c_y(t) = \sum_{i \in N_y} c_i(t) = \sum_{i \in N_y \cap N_x} c_i(t) + \sum_{i \in N_y \setminus N_x} c_i(t) = \sum_{i \in N_y \cap N_x} \underline{c_i} + \sum_{i \in N_y \setminus N_x} \overline{c_i}. \tag{7}$$

Из (5)-(7) следует $\sum_{i \in N_y \cap N_x} \underline{c_i} + \sum_{i \in N_y \setminus N_x} \overline{c_i} < \sum_{i \in N_x \cap N_y} \underline{c_i} + \sum_{i \in N_x \setminus N_y} \underline{c_i}$, или

$$\sum_{i \in N_y \setminus N_x} \overline{c_i} < \sum_{i \in N_x \setminus N_y} \underline{c_i}, \tag{8}$$

Отсюда (см. (2))

$$\sum_{i \in N_y \setminus N_x} \overline{c_i} < \sum_{i \in N_x \setminus N_y} \overline{c_i} \tag{9}$$

Добавив к обеим частям (9) слагаемое $\sum_{i \in N_x \cap N_y} \overline{c_i}$, тогда получим:

$$\sum_{i \in N_y \cap N_x} \overline{c_i} + \sum_{i \in N_y \setminus N_x} \overline{c_i} < \sum_{i \in N_x \cap N_y} \overline{c_i} + \sum_{i \in N_x \setminus N_y} \overline{c_i} \quad \text{или}$$

$$\overline{c_y} \le \overline{c_x}. \tag{10}$$

Из (8) и (2) также следует

$$\sum_{i \in N_y \setminus N_x} \underline{c_i} < \sum_{i \in N_x \setminus N_y} \underline{c_i}. \tag{11}$$

Добавив к обеим частям (11) слагаемое

Получим

$$\underline{c_y} \le \underline{c_x}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует, что допустимое решение y “лучше” паретовского оптимума x , что противоречит определению паретовского оптимума. Найденное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Для любой из рассмотренных выше оптимизационных задач множество слабых решений W является подмножеством множества паретовских решений P_2.*

Доказательство. Пусть x – слабое решение, т.е. x Î W, и предположим, что x Ï P_2. Следовательно, для него существует “строго лучшее” решение y, для которого выполняется неравенство (4). Так как решение x Î W, то для него существует такая реализация t весов ребер, при

$$c_x(t) \le c_z(t). \tag{13}$$

которой это решение является минимальным и, значит, $\forall z$ Î X

Неравенство (13) справедливо и для допустимого решения y. Отсюда получаем следующую цепочку неравенств

$\underline{c_x} \le c_x(t) \le c_y(t) \le \overline{c_y} < \underline{c_x}$, которая приводит к противоречию: $\underline{c_x} < \underline{c_x}$, Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любой из рассмотренных выше оптимизационных задач если существует постоянное дерево, то оно принадлежит паретовскому множеству P_1.*

Доказательство.

Пусть x – постоянное дерево. Докажем, что x Î P_1.

Предположим, что x Ï P_1, т.е. существует допустимое решение y, “лучшее” x. Тогда выполняются неравенства (101). Пусть для определенности

$$\underline{c_y} < \underline{c_x}. \tag{14}$$

Так как x является постоянным деревом, то для него верно следующее неравенство, которое выполняется для любых реализаций t: $c_x(t) < c_y(t)$

Рассмотрим реализацию t`, при которой веса всех ребер графа находятся на их нижних пределах. Для этой реализации справедливо $\underline{c_x} < \underline{c_y}$. неравенство.

Отсюда, учитывая (14), приходим к противоречию: $\underline{c_y} < \underline{c_y}$.

Теорема доказана.

3. Примеры. Рассмотрим два примера, иллюстрирующие теоремы 1-3.

Пример 1. Рассмотрим оптимизационную задачу об остовных деревьях на графе *G1* с интервально взвешенными ребрами (рис.1). Множество допустимых решений X состоит из четырех элементов $\{x, y, z, u\}$ (рис.2). В рассматриваемой задаче паретовское множество $P_1 = \{y, z\}$, множество слабых решений $W = \{y, z, u\}$ и паретовское множество $P_2 = \{x, y, z, u\}$.

Рис. 1. Граф *G1*.

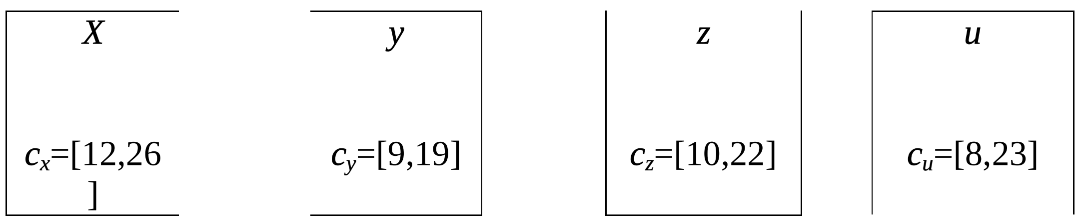

Рис. 2. Допустимые решения задачи об остовных деревьях.

Пример 2. Рассмотрим оптимизационную задачу об остовных деревьях на графе *G2* с интервально взвешенными ребрами (рис.3).

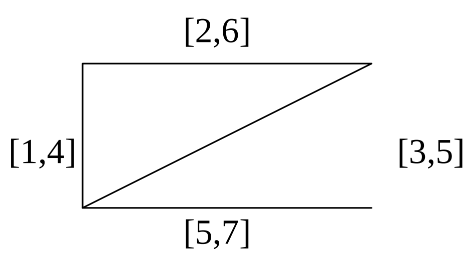

Рис. 3. Граф *G2*.

Множество допустимых решений X состоит из трех элементов $\{x, y, z\}$ с соответствующими значениями интервальных оценок целевых функций: c_x=[8,17], c_y=[9,16], c_z=[10,18].

В рассматриваемой задаче паретовское множество $P_1 = \{x, y\}$, множество слабых решений $W = \{x, y, z\}$ и паретовское множество $P_2 = \{x, y, z\}$. Допустимое решение x является постоянным.

4. Заключение. Рассмотрев свойства множеств P_1, P_2 и W в теоремах 1-3, можно сделать следующие выводы. Паретовское множество P_2 может содержать решения, не являющиеся оптимальными ни при каких реализациях параметров. Поэтому множество P_2 можно считать избыточным и неприемлемым в качестве решения оптимизационной задачи. Множество слабых решений W может содержать решения, оптимальные лишь при редко встречающихся реализациях. Более того, можно показать, что для каждого (непаретовского) слабого решения существует паретовский оптимум из P_1, имеющий "лучшее" значение целевой функции. Поскольку постоянное решение находится (если оно существует) в паретовском множестве P_1, то учитывая вышеизложенное, множество P_1 целесообразно принять в качестве решения любой из рассматриваемых оптимизационных задач. Следует также отметить, что в худшем случае [3] множество P_1 может совпадать с множеством допустимых решений X. Поэтому лицу, принимающему решение, целесообразно предложить нескольких представителей паретовского множества P_1.

Список использованной литературы

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. Г.Е. Минца, А.Г. Яковлева / Под ред. Ю.В. Матиясевича. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Вощинин А.П., Сотиров Г.Р. Оптимизация в условиях неопределенности. – Изд-во МЭИ (СССР); «Техника» (НРБ), 1989. – 224 с.
3. Козіна Г.Л. Дослідження екстремальних задач на графах з інтервальними параметрами // Вісник Запорізького державного університету, 1999. - №1. – С. 63-68.
4. Kozina G.L., Perepelitsa V.A. Spanning Trees Problem: Solvability and Computational Complexite// Interval Computations, 1.- 1994. - P.42 – 50.
5. Yaman H. Karasan O.E. Mustafa O.P. Minimum Spanning The Problem with. Interval Data, Bilkent University, Department of Industrial Engineering, Techical Report 9909, July, 1999.

Поступила в редколлегию 12.05.2001 г.