УДК 517.92

В.Г.КОЗЫРЕВ, канд. тех. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

ТЕРМИНАЛЬНАЯ ОШИБКА ПОЧТИ ТОЧНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПРИВЕДЕНИЯ В НОЛЬ

Для нестационарной линейно–квадратичной задачи получено соотношение, связывающее в явном виде терминальную ошибку и терминальную матрицу критерия качества и позволяющее путем подбора последней добиться необходимой точности приведения в ноль выхода системы.

Рассмотрим задачу приведения в нулевое состояние выхода линейной системы. Динамика системы задана уравнением пространства состояний на фиксированном отрезке времени $0 \le t \le T$ с произвольным начальным условием и нулевым конечным условием на выход системы вида:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t), \qquad x(0) = x^0, \quad Hx(T) = 0. \tag{1}$$

Приведение осуществляется оптимально в смысле минимизации функционала

$$I[u(t)] = \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt. \tag{2}$$

В выражениях (1), (2): $x \in E^n$ - вектор состояния; $u \in E^r$ - вектор управления; матрицы $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ и $R(t)$ являются непрерывными функциями времени t для всех $t \in [0,T]$; $Q(t)$ – неотрицательно определенная, $R(t)$ – положительно определенная на отрезке $[0,T]$; H –постоянная матрица размера $m \times n$, $m<n$; размеры остальных матриц соответствующие; штрих означает транспонирование.

К задаче (1), (2) относится задача управления выходом

$$y = C(t)x$$

рассматриваемой системы (1), в которой минимизируется функционал

$$I[u(t)] = \int_0^T [y'(t)D(t)y(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt,$$

где матрицы $C(t)$ и $D(t)$ непрерывны, а $D(t)$ неотрицательно определена на $[0,T]$. Это верно, если принять $H = C(T)$, $Q(t) = C'(t)D(t)C(t)$ и записать с учетом последнего данный функционал в виде (2).

Решение задачи (1), (2) хорошо известно [1] и имеет вид:

$$u(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K(t)x(t), \tag{3}$$

где для матрицы $K = K(t)$ можно получить с учетом [1, 2] следующее представление (аргумент t в выражениях для простоты опускаем):

$$K = P + W'H'M^{-1}HW, \tag{4}$$

в котором матрицы $P = P(t)$, $W = W(t)$ и $M = M(t)$ – решения матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP}{dt} = -PA(t) - A'(t)P + PS(t)P - Q(t), \qquad P(T) = 0,$$

$$\frac{dW}{dt} = -W(A(t) - S(t)P), \qquad W(T) = E, \tag{5}$$

$$\frac{dM}{dt} = -HWS(t)W'H', \qquad M(T) = 0,$$

$S(t) = B(t)R^{-1}(t)B'(t)$; E - единичная матрица.

Для существования решения требуется невырожденность (а более точно, в силу структуры последнего уравнения (5), положительная определенность) матрицы $M(t)$ на промежутке управления [0, T). Нетрудно показать, по аналогии с [3], что необходимым и достаточным условием для положительной определенности $M(t)$ является полная управляемость системы (1) по выходу $y = C(t)x$, $C(T) = H$ на любом отрезке $[t_0, T] \subseteq [0, T]$.

Из (4), (5) видно, что при стремлении $t \to T$ значения коэффициентов усиления в цепи обратной связи должны неограниченно возрастать. Это неосуществимо, и на практике коэффициенты усиления, в соответствии с законом (4), (5), нужно делать как можно большими, что тоже не очень хорошо, так как тогда система будет очень чувствительной к различного рода помехам. Кроме того, неясно насколько большими необходимо сделать коэффициенты в цепи обратной связи для удовлетворительного выполнения цели управления. Удовлетворительным, очевидно, считается управление, приводящее выход системы достаточно близко к нулю.

Таким образом, более естественной, с практической точки зрения, представляется задача оптимального приведения объекта в нулевое состояние с заданной точностью. Математически эту задачу можно сформулировать как задачу управления системой

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u(t), \qquad x(0) = x^0, \tag{6}$$

для которой минимизируется другой функционал:

$$I_l[u(t)] = \frac{1}{l}x'(T)H'FHx(T) + \int_0^T [x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt, \tag{7}$$

где F – постоянная положительно определенная матрица, определяющая относительные веса штрафа для каждой компоненты выхода. Величина $1/l$ определяет порядок штрафа. Малый параметр l есть конкретное выражение достаточной для данной задачи точности приведения.

Пусть $x_0(t)$ – оптимальная траектория системы (1), (2), а $x_l(t)$ – оптимальная траектория системы (6), (7). Имеет место следующая оценка [2]: $\|x_0(t)-x_l(t)\| < l\,O(1)$ при $l\to 0$ равномерно на отрезке $0\le t\le T$.

В частности для $t=T$ $x_0(T)=0$, и имеет место оценка терминальной ошибки оптимального приведения в задаче (6), (7)

$$\|x_l(T)\| < l\,O(1), \qquad l\to 0. \tag{8}$$

Вместо оценки (8) получим точную формулу для терминальной ошибки.

Оптимальное управление для задачи (6), (7) определяется соотношением

$$u_l(t) = -R^{-1}(t)B'(t)K_l(t)x(t), \tag{9}$$

где матрица Риккати $K_\lambda = K_\lambda(t)$ выражается, аналогично (4), представлением (аргумент t здесь и ниже тоже опускаем)

$$K_l = P + W'H'(M + lF^{-1})^{-1}HW, \tag{10}$$

а матрицы $P=P(t)$, $W=W(t)$ и $M=M(t)$ удовлетворяют тем же уравнениям (5).

Запишем уравнение оптимального движения системы:

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B'K_\lambda x \equiv (A - SK_\lambda)x. \tag{11}$$

Подставляя выражение для матрицы Риккати K_l, получим:

$$\dot{x} = (A-SP)x - SW'H'(M + lF^{-1})^{-1}HWx. \tag{12}$$

Обозначим

$$f(t) = (M + lF^{-1})^{-1}HWx. \tag{13}$$

Легко убедиться, что $\frac{d}{dt}f(t)\equiv 0$, т.е. $f(t)\equiv const$. В самом деле, продифференцируем $f(t)$ как произведение функций:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) = &-(M + lF^{-1})^{-1}\frac{dM}{dt}(M + lF^{-1})^{-1}HWx + \\ &+(M + lF^{-1})^{-1}H\frac{dW}{dt}x + (M + lF^{-1})^{-1}HW\frac{dx}{dt}\end{aligned}.$$

В силу уравнений (5) и (11) имеем:

$$\frac{d}{dt}f(t)=(M+lF^{-1})^{-1}HWSW'H'(M+lF^{-1})^{-1}HWx-$$

$$-(M+lF^{-1})^{-1}HW(A-SP)x+(M+lF^{-1})^{-1}HW(A-SK_l)x$$

Перегруппируя члены и приводя подобные в этом выражении с учетом (10), получаем:

$$\frac{d}{dt}f(t)=(M+lF^{-1})^{-1}HWSW'H'(M+lF^{-1})^{-1}HWx+$$

$$+(M+lF^{-1})^{-1}HWSPx-(M+lF^{-1})^{-1}HWSK_l x=$$

$$=(M+lF^{-1})^{-1}HWSW'H'(M+lF^{-1})^{-1}HWx+$$

$$+(M+lF^{-1})^{-1}HWSPx-(M+lF^{-1})^{-1}HWS\times$$

$$\times(P+W'H'(M+lF^{-1})^{-1}HW)x=$$

$$=(M+lF^{-1})^{-1}HWSW'H'(M+lF^{-1})^{-1}-$$

$$-(M+lF^{-1})^{-1}HWSW'H'(M+lF^{-1})^{-1}=0$$

Используя это соотношение, можно получить формулу для ошибки приведения. Действительно: $f(0)=f(T)$, откуда, используя выражение (13) и граничные условия (1), (5), имеем:

$$(M(0)+lF^{-1})^{-1}HW(0)x(0)=(M(T)+lF^{-1})^{-1}HW(T)x(T),$$

$$(M(0)+lF^{-1})^{-1}HW(0)x^0=l^{-1}FHx(T),$$

$$Hx(T)=lF^{-1}(M(0)+lF^{-1})^{-1}HW(0)x^0$$ и, наконец,

$$y(T)=Hx(T)=l(M(0)F+lE)^{-1}HW(0)x^0. \tag{14}$$

Соотношение (14) является точной формулой терминальной ошибки. При достаточно малом l можно записать приближенное выражение для ошибки с точностью до членов более высокого порядка малости:

$$y(T)=Hx(T)=lF^{-1}M^{-1}(0)HW(0)x^0. \tag{15}$$

Соотношение (14) или приближенное соотношение (15) дают величину терминальной ошибки для общего случая, когда эта ошибка контролируется путем введения в критерий качества штрафной матрицы $(1/l)F$. При $F=0$ получаем известную частную формулу из [1] для неконтролируемой, «свободной» терминальной ошибки (случай свободного конца траектории, когда в функционале качества отсутствует терминальный член с матрицей F):

$$y(T)=Hx(T)=HW(0)x^0. \tag{16}$$

Выражение (16), однако, не позволяет рассчитывать ошибку для терминального регулятора задачи (6), (7), в частности для задачи приведения выхода системы в малую окрестность ноля.

Заметим, что в постановке задачи (6), (7) требуется положительная определенность матрицы $M(t)$ лишь в момент времени $t = 0$. Достаточно, чтобы система была вполне управляемой на отрезке управления $[0, T]$, т.е. требования по управляемости к системе в случае почти точного приведения ниже.

Формулы (14) и (15) представляют собой выражения для расчета терминальной ошибки приведения на заданном отрезке управления при заданных начальных условиях и критерии качества. Один раз проинтегрировав уравнения (5) и получив $M(0)$ и $W(0)$, можно подбором малого параметра l и матрицы F добиться приемлемой точности приведения на заданном отрезке управления, добиваясь, таким образом, компромисса между точностью и величиной коэффициентов усиления в цепи обратной связи.

Кроме того, для автономных систем (если матрицы A, B, Q и R – постоянны) формулы (14) и (15) позволяют легко осуществить совместный выбор штрафного малого параметра l и продолжительности отрезка управления T для успешной реализации приведения в ноль с заданной точностью. Для этого уравнения (5) решаются в обратном времени на отрезке $[0, \bar{T}]$ при достаточно большом $\bar{T}$. Затем, по формуле (14) для всех $t \in [0, \bar{T}]$ рассчитывается значение ошибки приведения $y(\bar{T} - t) = l\,(M(t)F + lE)^{-1} HW(t)x^0$, которая будет иметь место если процесс управления начнется в момент t. В результате можно построить зависимость ошибки приведения от длины отрезка управления $\bar{T} - t$ при фиксированном l и выбрать l исходя из продолжительности отрезка управления.

Список использованной литературы

1. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А.Брайсон, Хо Ю-Ши. - М.: Мир, 1972. - 544 с.
2. Козырев В.Г. Оптимальный регулятор почти точного приведения в ноль.// Вестник СевГТУ. Сер. Автоматизация процессов и управление. – Севастополь: изд. СевГТУ, 1998. - Вып. 14. - С.72-76.
3. Глизер В.Я. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи, связанной с методом штрафных функций / В.Я.Глизер, М.Г.Дмитриев // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т.XVII. - N96. - С.1574 - 1580.

Поступила в редколлегию 02.08.2001 г.