УДК 681.5.075

Л.А. КРАСНОДУБЕЦ, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ВОССТАНАВЛИВАЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Предложен ориентированный не применение ЭВМ критерий восстанавливаемости линейных нестационарных систем управления, определённых на конечных интервалах. Необходимое и достаточное условие восстанавливаемости сводится к вычислению минимального сингулярного числа, которое находится при помощи алгоритма сингулярного SVD - разложения спектральной матрицы восстанавливаемости, получаемой на основе использования спектральной формы описания нестационарных систем управления.

Решение задач управления, фильтрации и идентификации связано с исследованием возможности определения текущих значений вектора состояния линейной динамической системы по прошлым наблюдениям за её выходом. Указанная возможность имеет место, если динамическая система обладает свойством восстанавливаемости.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(q)}{dq} = A(q)x(q) + B(q)u(q), \\ &y(q) = C(q)x(q); \quad q \in [t_0, t_f], \; x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $x(q)$ –вектор состояния (n × 1); $u(q)$ – вектор управления (m × 1);

$y(q)$ – вектор выходов (r × 1); $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$ – непрерывные матрицы размерности (n × n), (n × m) и (r × n) соответственно.

Как показано в [1] исследование восстанавливаемости системы (1) сводится к исследованию неотрицательно определённой функциональной матрицы (грамиана)

$$M(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G^T(q,t_0)C^T(q)C(q)G(q,t_0)dq\ , \tag{2}$$

где $G(q,t_0)$ – переходная (n×n)-матрица системы (1).

При этом система (1) является полностью восстанавливаемой в том и только том случае, если для всех t_1 существует такой момент времени t_0 $(-\infty < t_0 < t_1)$, для которого матрица $M(t_0,t_1)$ является неособой.

Отмеченный подход имеет существенный недостаток, так как для построения матрицы-грамиана требуется вычисление интеграла от произведения функциональных матриц. При этом предварительно должна быть найдена переходная матрица системы (1) , вычисление которой за исключением небольшого числа специальных случаев представляет собой довольно сложную в вычислительном отношении задачу.

Рассмотрим свободный от указанного недостатка подход к решению задач анализа восстанавливаемости нестационарных динамических систем, основанный на применении спектральной теории нестационарных систем управления [2]. В отличие от методов пространства состояний, спектральный метод основан на использовании представлений линейных операторов систем в форме матриц, интерпретируемых как нестационарные передаточные функции.

Введем в рассмотрение однородную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx(q)}{dq} = A(q)x(q), \\ &y(q) = C(q)x(q);\quad q \in [t_0, t_f];\ x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Выберем подпространство проекций размерностью k и найдем проекцию сигнала $x(q)$ через его спектральную характеристику.

Имеем

$$x(q) = P(t_f, q)X(t_f), \tag{4}$$

где $P(t_f, q)$ – базисная матрица, структура которой имеет вид

$$P(t_f, q) = p(t_f, q)I, \tag{5}$$

где $p(t_f, q) = \lfloor r_0(t_f, q)\, r_1(t_f, q)\, r_2(t_f, q) \ldots r_k(t_f, q) \rfloor$– матрица-строка, составленная из k базисных функций, образующих пространство проекций; I - единичная матрица (n×n); $X(t_f)$ – спектральная характеристика проекций вектора состояний.

Рассмотрим решение однородной системы (3) в виде

$$x(q) = G(q, t_0)x_0, \tag{6}$$

где $G(q, t_0)$– переходная матрица (n× n) исследуемой системы (1).

Заменим в выражении (6) сигналы проекциями, которые представим в виде их спектральных характеристик. Далее умножим обе части полученного равенства на матрицу $P^T(t_f, q)$ и образуем скалярное произведение, определив его по области $[t_0, t_f]$.

В результате получаем

$$\int_{t_0}^{t_f} P^T(t_f, q)P(t_f, q)dq\, X(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} P^T(t_f, q)G(0, q)P(t_f, q)dq\, X_0(t_f). \tag{7}$$

Учитывая определение нестационарной передаточной функции (представление оператора системы в базисе $P(t_f, q)$), а также свойство базисной матрицы

$$\int_{t_0}^{t_f} P^T(t_f, q) P(t_f, q) dq = I,$$

перепишем полученный результат (7) в виде

$$X(t_f) = W_0(t_f, t_f) X_0(t_f), \tag{8}$$

где $W_0(t_f, t_f)$ – нестационарная передаточная функция исследуемой системы по начальным условиям. Рассматривая аналогичным образом уравнение выходов в системе (3), можно получить

$$Y(t_f) = W_C(t_f, t_f) X(t_f), \tag{9}$$

где

$$W_C(t_f, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} P^T(t_f, q) C(q) P(t_f, q) dq. \tag{10}$$

Полученные уравнения (8) и (9) представляют собой спектральную форму описания системы (3).

При этом условие восстанавливаемости линейной нестационарной системы, заданной спектральной формой описания, может быть сформулировано по аналогии [1] в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы система (8), (9), определённая на конечном интервале* $[t_0, t_f]$ *и представленная спектральной формой описания, была полностью восстанавливаемой необходимо и достаточно, чтобы для всех времён* t_1 *существовал момент* t_0 $(t_0 \le t_1 \le t_f)$ *такой, что из равенства спектральной характеристики выхода* $Y(t_1) = 0$ *следовало бы следующее равенство для спектральной характеристики вектора начального состояния* $X_0(t_1) = 0$.

Необходимость условия теоремы следует из определения полной восстанавливаемости. Если система (8), (9) полностью восстанавливаемая, то из $Y(t_f) = 0$ следует $X_0(t_f) = 0$.

Достаточность условия теоремы доказывается следующим образом. Рассмотрим спектральные характеристики выхода для различных начальных состояний

$$Y(t_1) = W_C(t_1, t_1) W_0(t_1, t_1) X_{01}(t_1) \tag{11}$$

$$Y(t_1) = W_C(t_1, t_1) W_0(t_1, t_1) X_{02}(t_1) \tag{12}$$

Приравнивая (11) и (12) получим следующий результат

$$W_C(t_1, t_1) W_0(t_1, t_1)[X_{01}(t_1) - X_{02}(t_1)] = 0, \qquad t_0 \le t_1 \le t_f. \tag{13}$$

Последнее свидетельствует о том, что, если из (13) следует
$[X_{01}(t_1) - X_{02}] = 0$ или $X_{01}(t_1) = X_{02}(t_1)$, то исследуемая система является полностью восстанавливаемой.

Для интервала $[t_0, t_1]$ имеем

$$Y(t_1) = W_C(t_1,t_1)W_0(t_1,t_1)X_0(t_1) \quad \text{и} \quad W_0^T(t_1,t_1)W_C^T(t_1,t_1)Y(t_1) =$$
$$= W_0^T(t_1,t_1)W_C^T(t_1,t_1)W_C(t_1,t_1)W_0(t_1,t_1)X_0(t_1).$$

Введём обозначение

$$Q(t_0,t_1) = W_0^T(t_1,t_1)W_C^T(t_1,t_1)W_C(t_1,t_1)W_0(t_1,t_1),$$

где $Q(t_0,t_1)$- спектральная матрица восстанавливаемости (спектральная форма матрицы-грамиана $M(t_0,t_1)$.

Можно показать [3], что $\det(Q(t_0,t_1) \neq 0$ является необходимым и достаточным условием восстанавливаемости системы (8), (9), которая, в свою очередь, отражает свойства системы (3).

Для анализа свойств матрицы $Q(t_0,t_1)$ применим SVD-алгоритм сингулярных разложений [4]. В соответствии с этим алгоритмом матрица $Q(t_0,t_1)$ подвергается факторизации и приводится к виду LDV^T, где L и V – некоторые ортогональные матрицы, а матрица D диагональная, элементами которой являются сингулярные числа s_i .$\geq$ 0. Матрица $Q(t_0,t_1)$ будет невырожденной, если $\det(Q(t_0,t_1) \neq 0$. В рассматриваемом случае определитель можно вычислить следующим образом

$$\det Q(t_0,t_1) = \det(L)\det(D)\det(V^T).$$

Поскольку матрицы L и V^T ортогональные (по построению), то их определители $\det(L)$ и $\det(V^T)$ равны ±1. Определитель диагональной матрицы **D** равен произведению диагональных элементов. Следовательно, можно заключить, что

$$\left|\det Q(t_0,t_1)\right| = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \ldots \cdot s_n.$$

Последний результат свидетельствует о том, что, если спектральная матрица восстанавливаемости вырожденная, то хотя бы одно из сингулярных чисел равно нулю. Поэтому для решения вопроса о вырожденности квадратной матрицы достаточно выбрать ее наименьшее сингулярное число s_{min} и сравнить его со значением е “машинного нуля” нуля используемой для вычислений ЭВМ. Если s_{min} £ *e*, то можно считать, что исследуемая матрица вырожденная.

Таким образом, спектральный критерий восстанавливаемости можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы линейная нестационарная система, описываемая уравнениями (8), (9) была полностью восстанавливаема на интервале* $[t_0, t_f]$, *необходимо и достаточно, чтобы наименьшее сингулярное число* $s_{\min}$ *спектральной матрицы восстанавливаемости* $Q(t_0, t_1)$, *определённой на интервале* $[t_0, t_f]$, *удовлетворяло неравенству* $s_{\min} > e$ *при всех* $t_0 \le t_1 \le t_f$, *где* e *- оценка "машинного нуля" применяемой ЭВМ.*

Матрица $Q(t_0, t_1)$ может быть построена по заданной матрице состояния $A(\Theta)$ и матрице выходов $C(\Theta)$, если воспользоваться методом формирующих уравнений [5].

Рассмотрим нестационарную передаточную функцию по начальным условиям для системы (1), определённую на конечном интервале $[t_0, t_f]$ относительно базиса $P(t, q)$, в виде

$$W_0(t_f, t_f) = \int_{t_0}^{t_1} P^T(t_f, q) G(q, t_0) P(t_f, t_0) dq \,. \tag{14}$$

Принимая во внимание известное соотношение [2]

$G(q, t_0) = H(t_f, q) P^T(t_f, t_0)$, а также ортогональность матрицы $P(t_f, t_0)$, преобразуем (14) к виду

$$W_0(t_f, t_f) = \int_{t_0}^{t_1} P^T(t_f, q) H(t_f, q) dq \,, \tag{15}$$

где $$H(t_f, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G(t_1, t) P(t_f, t) dt \,. \tag{16}$$

Рассматривая $W_0(t_f, t_f, t_1)$ как функцию t_1, продифференцируем обе части (15) и получим формирующее уравнение для первой компоненты спектральной матрицы восстанавливаемости

$$\frac{dW_0(t_f, t_f, t_1)}{dt_1} = P^T(t_f, t_1) H(t_f, t_1) \,. \tag{17}$$

Используя (16), можно аналогичным путём построить формирующее уравнение для матрицы $H(t_f, t_1)$

$$\frac{dH(t_f, t_1)}{dt_1} = A(t_1) H(t_f, t_1) + P(t_f, t_1) \,. \tag{18}$$

По формуле (10) строится формирующее уравнение для $W_c(t_f, t_f)$

$$\frac{dW_c(t_f,t_f,t_1)}{dt_1} = P^T(t_f,t_f,t_1)C(t_1)P(t_f,t_1),\ t_1 \in [t_0,t_f]. \quad (19)$$

Таким образом, вычисление компонентов спектральной матрицы восстанавливаемости можно свести к однородной вычислительной процедуре - численному интегрированию систем дифференциальных уравнений (17), (18), (19) с начальными условиями

$$t_1 = t_0;\ W_0(t_f,t_f,t_1) = 0,\ H(t_f,t_1) = 0,\ W_c(t_f,t_f,t_1) = 0;\ t_1 \in [t_0,t_f].$$

При интегрировании системы формирующих уравнений в качестве базиса удобно выбрать ортонормированные нестационарные полиномы Лежандра, которые можно вычислять по формуле [2]

$$P_i(t\ ,q) = \sqrt{\frac{2i-1}{t}} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_{i+k}^{i} C_i^{\,i-k} \frac{q^k}{t^k},$$

где $i = 0,1,2...;\ 0 \le q \le t$.

Практическая реализация предложенного подхода для анализа восстанавливаемости нестационарных систем управления относительно просто выполняется при помощи пакета MATLAB.

Список использованной литературы

1. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.-М.: Мир, 1977.-650с.
2. Семёнов В.В., Солодовников В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 335с.
3. Краснодубец Л.А. Спектральная форма критерия наблюдаемости нестационарных систем // Вестник СевГТУ: Автоматизация процессов и управление: Севастоп. Гос. Техн. ун-т. – 2000. - Вып. 27.- С. 16-20.
4. Форсайт Дж., Мальком М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980.-279с.
5. Барабанов А.Т. , Краснодубец Л.А. Применение методов формирующих уравнений для аппроксимации сигналов и операторов многомерных нестационарных систем // Приборостроение. – К.: Техніка - 1978 . - № 25. - с.3-9.

Поступила в редколлегию 29.05.2001 г.