

4. Собственные значения задачи (15) при всех n можно разбить на $m+1$ серию, имеющую в качестве предельных точек b_k – корни $E_0(I)$ и $+\infty$. При этом собственные значения I_{nk} , отвечающие серии с номером k , расположены на промежутке (b_k, g_{k+1}) . Собственные значения $I_{n\infty}$ с предельной точкой $+\infty$ расположены на промежутке $(g_{m+1}, +\infty)$.

Список использованной литературы

1. Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. - М.: "Наука", 1989. - 410 с.
2. Л.Д. Орлова Диссертация на соискание научной степени кандидата физ.-мат. наук. - Симферополь, - 1997.

Поступила в редколлегию 19.05.2001 г.

УДК 539.375

В.А. КРЫВЕНЬ, Тернопольский гос. техн. ун-т
kryven@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ БЕРЕГОВ НА ЛОКАЛИЗАЦИЮ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛОСКОСТИ ТРЕЩИНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Рассмотрено континуальную пластическую зону и зону пластичности локализованную в плоскости трещины продольного сдвига, на берегах которой действуют силы трения. Исследовано влияние сил на локализацию пластических деформаций. Принято, что предел текучести k_1 в плоскости трещины меньше предела текучести k в любой другой точке тела. Определено максимальное достаточное для локализации значение k_1 .

Формы пластических зон, получаемые из решения упругопластических задач в классе непрерывных функций, не всегда соответствуют наблюдаемым экспериментально. Пластические деформации нередко оказываются локализованными в полосах скольжения [1]. Решение упругопластической задачи в классе кусочно непрерывных функций является неединственным и может выражать пластические деформации, распределенные в объемных зонах и сосредоточенные в системах полос нулевой толщины [2]. Известен критерий выбора возможной структуры зоны [3]: реализуемой структуре соответствует наибольшее значение скорости диссипации энергии

$$\mathcal{D} = \int_V s_{ij} \mathcal{E}_{ij}^p dV \quad (1)$$

на множестве всевозможных структур, V - область пластических деформаций, s_{ij} - тензор напряжений, e_{ij}^p - тензор пластических деформаций (точка означает дифференцирование по параметру внешней нагрузки). В случае трещины продольного сдвига, берега которой свободны от внешних напряжений, условие $k_1 < \sqrt{2/3}k$ (k_1 - предел текучести при сдвиге в плоскости трещины, k - в других направлениях) является достаточным для локализации пластических деформаций в слое на продолжении трещины.

Поставим задачу определения достаточного условия локализации для трещины продольного сдвига в идеально упругопластическом теле при наличии сил трения на берегах трещины при ее раскрытии. На начальном этапе развития размеры зоны малы по сравнению с трещиной. Поэтому будем считать трещину полубесконечной ($x < 0, y = 0$), а нормальные напряжения сдвига на ее берегах постоянными и равными t_0 ($t_0 < k$). В несколько отличной постановке форма пластической зоны у вершин трещины исследовалась в работе [4]. Критерий выбора (1) основан на диссипации энергии пластических деформаций в пластическом слое на продолжении трещины (задача А) и в зоне сплошных пластических деформаций (задача В). Эти задачи можно свести к краевой задаче теории аналитических функций для функции $t(z) = t_{yz}(x, y) + it_{xz}(x, y)$ ($z = x + iy$) в области ее аналитичности, где напряженно-деформированное состояние является упругим.

Задача А. Аналогично работе [2] для функции $t(z)$ получаем следующую краевую задачу

$$\operatorname{Re} t(z) = t_0 \quad (z = x \pm i0) \quad (2)$$

$$|t(z)| = k \quad (z = x \pm i0, 0 \leq x \leq d) \quad (3)$$

$$t(z) - t_0 = \frac{K_3}{\sqrt{2pz}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \quad (4)$$

в области D (плоскость z , разрезанная по лучу $\operatorname{Re} z < d, \operatorname{Im} z = 0$), где K_3 - коэффициент, определяющий асимптотику поля напряжений при бесконечном удалении от трещины, d - подлежащая определению длина пластического слоя.

Вследствие условий (1) аналитическая и однолистная в области D функция $t(z)$ конформно отображает эту область в круговую луночку $\operatorname{Re} t > t_0, |t| < k$ (область G). Начальные точки слоя отображаются в угловые точки луночки, образом бесконечно удаленной точки плоскости z является точка $t = t_0$. Функцию $t(z)$ можно найти непо-

средственно, осуществив указанное конформное отображение. Ее удобно искать так

$$t = t(t), \quad z = z(t) \quad (t \in H), \quad (5)$$

где H - верхняя полуплоскость, на границе которой точкам $t = t_0 + i\sqrt{k^2 - t_0^2}$, $t = t_0$, $t = t_0 - i\sqrt{k^2 - t_0^2}$ соответствуют точки $t = -1$, $t = 0$, $t = 1$. Композицией элементарных отображений получаем

$$t(t) = k \frac{(t+1)^q e^{ia} + (t-1)^q e^{-ia}}{(t+1)^q + (t-1)^q}, \quad (6)$$

где $a = \arctg(\sqrt{k^2 - t_0^2} / t_0)$, $q = a / p$, $(t-1)^q, (t+1)^q$ - функции, аналитические в H , действительные и положительные при $t > 1$ и $t < -1$ соответственно.

$$z(t) = \frac{2K_3^2}{pk^2} (1 - t^2) \quad (7)$$

Концу пластического слоя на границе области H соответствует точка $t = 0$ и, поэтому, длина слоя $d = 2K_3^2 / (pk^2)$.

Задача В. Пусть L -граница сплошной пластической зоны. На линии L должны выполняться условия [5]

$$|t(z)| = k, \quad \text{Im} z t(z) = 0 \quad (z \in L) \quad (8)$$

Заменив условие (3) равенствами (8), получаем краевую задачу (2), (4), (8) для функции $t(z)$, являющуюся задачей со свободной границей. Если вместо функции $t(z)$ искать обратную к ней функцию $z = z(t)$ ($t \in G$), получаем краевую задачу в известной области G . Как и в предыдущем случае, будем искать функцию $z(t)$ в параметрическом виде (5), причем в качестве $t(t)$ опять примем функцию, определенную равенством (6).

Запишем условия для $z(t)$ на границе области G . Из (8) следует, что $\arg z|_L = -\arg t|_L$. Поэтому

$$\arg z(t) = -f(t), \quad (t \in (-1, 0)) \quad (9)$$

$$\text{где } f(t) = \arctg \frac{(t+1)^q \sin a}{(t+1)^q \cos a + (t-1)^q} - \arctg \frac{(1-t)^q \sin a}{(t+1)^q + (t-1)^q \cos a}.$$

Частям $\text{Re } t = t_0$, $0 < \text{Im } t < k \sin a$ и $\text{Re } t = t_0$, $-k \sin a < \text{Im } t < 0$ хорды границы луночки G соответствуют нижний и верхний берега трещины, которым на границе H соответствуют лучи $\text{Re } t > 1$, $\text{Im } t = 0$ и $\text{Re } t < -1$, $\text{Im } t = 0$. Поэтому

$$\arg z(t) = \begin{cases} p, & t > 1 \\ -p & t < -1 \end{cases} \quad (10)$$

Равенства (9), (10) задают $\arg z(t)$ на границе H . Вследствие этого для аналитической в H функции $x(t) = \ln z(t)$ приходим к задаче определения функции, мнимая часть которой на границе H известна и определяется правыми частями равенств (9), (10).

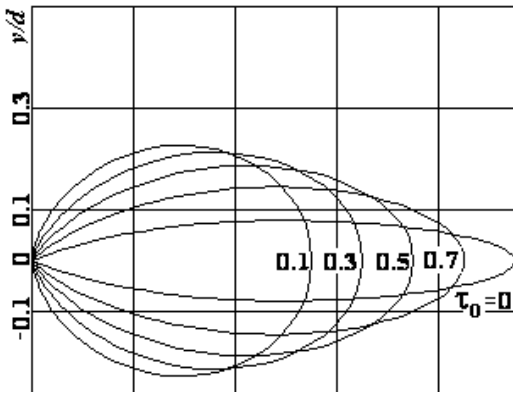
Представим функцию $x(t)$ так

$$x(t) = x_1(t) + q \ln(1 - t^2) + C, \quad (11)$$

где $\ln(1 - t^2)$ -аналитическая в H функция, мнимая часть которой равна p при $t > 1$, C - действительная постоянная. Тогда, согласно [6],

$$x_1(t) = -\frac{1}{p} f_1(t) - if(t), \quad f_1(t) = \int_{-1}^1 \frac{f(t) - f(y)}{t - y} dy. \text{ И, поэтому,}$$

$$z(t) = C(1 - t^2)^q e^{-if(t) - f_1(t)/p} \quad (12)$$



Постоянную C следует подобрать так, чтобы асимптотика функции $t(z)$ совпадала из заданной равенством (4). Для этого достаточно эквивалентности функций (7) и (12) при $t \rightarrow \infty$. Отсюда $C = d$. Из формулы (12) определим границу зоны пластических деформаций

$$\begin{cases} x(t) = dr(t) \cos(f(t)) \\ y(t) = dr(t) \sin(f(t)), \quad (t \in (-1, 1)) \end{cases}$$

где $r(t) = \exp(-f_1(t)/p)$. Форма границы зависит от действующего на берегах трещины напряжения трения t_0 (рис.1). Когда трение на берегах трещины небольшое, зона пластических деформаций близка к кругу радиуса $d/4$ [3]. Она сужается и приближается по своей протяженности к длине слоя по мере увеличения t_0 .

Условие локализации. Пусть \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_0 - скорости диссипации энергии пластических деформаций в пластическом слое и в сплошной пластической зоне соответственно. Для слоя пластичности формула (1) приобретает вид

$$\mathcal{D}_1 = 2 \int_0^d t_{yz}(x,0) \mathcal{K}(x,0) dx, \quad (13)$$

где $\mathcal{K}(x,0)$ - производная по K_3 от смещения вдоль оси аппликат. Из формул (6), (7) получаем

$$t_{xz}(x,0) = k \sin a \frac{a(x) - b(x)}{c(x)}, \quad t_{yz}(x,0) = k \sin a \frac{(a(x) + b(x)) \cos a + 2x^q}{c(x)},$$

$$\text{где } a(x) = (\sqrt{d} + \sqrt{d-x})^{2q}, \quad b(x) = (\sqrt{d} - \sqrt{d-x})^{2q}, \\ c(x) = a(x) + b(x) + 2x^q \cos a.$$

Представим функции $t_{xz}(x,0)$ и $t_{yz}(x,0)$ в следующем виде: $t_{xz}(x,0) = kf_2(x/d)$, $t_{yz}(x,0) = kf_3(x/d)$. Проинтегрировав функцию $t_{xz}(x,0)/m$ (m -модуль сдвига) по отрезку $[x, d]$ и продифференцировав затем по K_3 получаем

$$w(x,0) = \frac{kd}{m} \left(\int_{x/d}^1 f_2(u) du + \frac{x}{d} f_2\left(\frac{x}{d}\right) \right)$$

Таким образом из (13) получаем

$$D_1 = \frac{2k^2 dd}{m} I_1(t_0) \quad (14)$$

$$\text{где } I_1(t_0) = \int_0^1 f_3(u) \left(\int_u^1 f_2(v) dv + uf_2(u) \right) du.$$

Для сплошной пластической зоны формулу (1) можно записать в виде криволинейного интеграла по длине дуги контура L

$$D_0 = \int_L t_{nz}(s) w(s) ds, \quad (15)$$

где $t_{nz}(s)$ и $w(s)$ нормальное сдвиговое напряжение и перемещение как функции длины дуги. Заменив в формуле (15) интегрирование по длине дуги интегрированием по углу j с вершиной в конце трещины

и воспользовавшись формулой $w(j) = \frac{kd}{m} \int_0^j r(J) dJ$, получаем

$$D_0 = \frac{2k^2 dd}{m} I_0(t_0), \quad (16)$$

$$\text{где } I_0(t_0) = \int_0^a r^2(t) f'(t) dt.$$

Если предел текучести везде постоянный и равен k для любого напряжения трения $t_0 < k$, то $D_0 > D_1$. Согласно критерию (1) реальной формой является сплошная зона. Скорость диссипации энергии пластических деформаций в сплошной зоне превышает значение этой же величины в слое не более чем на 35%. Сравним теперь величины D_0 и D_1 в предположении, что предел текучести на продолжении трещины k_1 меньше k - предела текучести в любом другом направлении. В этом случае $D_0 < D_1$ как только $k_1 < k \sqrt{I_1(t_0)/I_0(t_0)}$. При изменении t_0 от

0 до k максимальное k_1 , достаточное для локализации пластических деформаций в слое, почти равномерно изменяется от $0.82k$ до k .

Список использованной литературы:

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - М.: ИЛ.-1954. - 647с.
2. Кривень В.А. Узагальнене представлення зони пластичності при антиплоскій деформації пружнопластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень. -Доп. АН УРСР, сер.А, №2,1983.- С.33-37.
3. Черепанов Г.П. О проблеме неединственности в теории пластичности.- Докл. АН СССР.- 1974.- 218, №4.- С. 779-782.
4. Артур П., Блекберн У. Влияние формы пластической зоны на ее протяженность и раскрытие трещин// Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению - М.: Мир. - 1972. - С. 107-118.
5. Кривень В.А. Антиплоска пружно-пластична задача для тіла з жорстким призматичним включенням правильної форми// Фіз.-хім. механіка матеріалів.- 2000.-№1. - С.23-26.
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. -М.: Физматгиз. - 1968. -512с.

Поступила в редколлегию 29.04.2001 г.