МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.432

А.В. КУЖЕЛЬ, докт. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

ПРОСТРАНСТВА ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе содержится обзор основных результатов, посвященных теории пространств граничных значений эрмитовых (в частности-симметрических) операторов. В последние два десятилетия соответствующая теория интенсивно развивалась и применения ее в различных разделах математики неуклонно возрастали.

В дальнейшем необходимые обоснования приводятся лишь тогда, когда в математической литературе они отсутствуют, или соответствующие утверждения иначе обосновываются.

Принятые здесь терминология и обозначения соответствуют тем, которые использовались в работах[1-3].

1. Симметрические операторы. В 1973 году, при исследовании диссипативных операторов, Талюш [4] обосновал следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* A*-замкнутый симметрический оператор с конечными и равными дефектными числами, а* Γ_1 *и* Γ_2*- некоторые линейные отображения области определения* $D(A^*)$ *оператора* A^* *на* n*-мерное пространство* X *и такие что:*

1. $$\Gamma_1 x = \Gamma_2 x = 0 \qquad (\forall x \in D(A)) \tag{1}$$
2. *Для произвольных* x *и* y *из* $D(A^*)$
$$(A^* x, y) - (x, A^* y) = (\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_x - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_x. \tag{2}$$
3. *Для произвольных векторов* f *и* g *из* X *существует такой вектор* $X \in D(A^*)$*, что*
$$\Gamma_1 x = f, \qquad \Gamma_2 x = g. \tag{3}$$

Если при этом B *- диссипативный оператор, действующий в пространстве* X *, то расширение* A_B *оператора* A*, определяемое условиями*
$$A_B x = A^* x, \qquad B\Gamma_2 x = \Gamma_1 x \qquad (x \in D(A^*)),$$
является максимальным диссипативным оператором.

В своей работе Талюш не обосновывал существование операторов Γ_1 и Γ_2, которые удовлетворяли бы условиям сформулированной теоремы. Этот пробел был ликвидирован в работе Кочубея [5], (см. также [6], [3] или теорему 3 в этой работе). В [5] показано, что для произвольного симметрического оператора с равными и необязательно конечными дефектными числами существуют операторы Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условиям теоремы Талюша. В этой же работе для тройки (X, Γ_1, Γ_2), где X - уже некоторое гильбертово пространство, предложено название: **пространство граничных значений (ПГЗ)** оператора A.

В1976 году Брук [6] показал, что равенство (1) является следствием условий 2 и 3 из указаной теоремы.

Действительно, справедлива следующая

Теорема 2. *Равенства*

$$\Gamma_1 x = \Gamma_2 x = 0 \tag{4}$$

имеют место тогда и только тогда, когда $x \in D(A)$

Доказательство. Пусть имеют место равенства (4). Тогда, на основании равенства (2),

$$(A^* x, y) = (x, A^* y) \qquad (\forall y \in D(A^*)),$$

откуда следует, что $x \in D(A^{**}) = D(A)$.

Наоборот, пусть $x \in D(A)$. Рассмотрим векторы

$$f = -\Gamma_2 x, \qquad g = \Gamma_1 x \qquad (\{f, g\} \in X).$$

На основании условия 3 в $D(A^*)$ найдется такой вектор y, что

$$\Gamma_1 y = -\Gamma_2 x, \qquad \Gamma_2 y = \Gamma_1 x \tag{5}$$

Так как $x \in D(A)$, а $y \in D(A^*)$, то левая часть в равенстве (2) равна нулю. Следовательно, с учетом равенств (5),

$$0 = \|\Gamma_1 x\|^2 + \|\Gamma_2 x\|^2,$$

откуда и следуют равенства (4).

Отметим, что утверждения теоремы 2 кратко можно записать в виде равенства

$$D(A) = (Ker\Gamma_1) \cap (Ker\Gamma_2).$$

Предыдущие рассуждения дают возможность сформулировать следующее, во многих случаях удобное для применений, определение ПГЗ.

Определение 1. Тройка (X, Γ_1, Γ_2), где X - некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\bullet,\bullet)_X$, а Γ_1 и Γ_2 - линейные отображения $D(A^*)$ на X, называется *пространством граничных значений (ПГЗ)* симметрического оператора A, если:

1. Для произвольных x и y из $D(A^*)$ имеет место равенство (2).

2. Для произвольных f и g из X в $D(A^*)$ существует такой вектор x, что имеют место равенства (3).

Теорема 3. (Кочубей [5]). *Для любого симметрического оператора A с индексом дефекта (n,n), $(n \le \infty)$ существует ПГЗ, где* $\dim X = n$.

Доказательство. Пусть

$$N_z = Ker(\,A^* - \bar{z}I\,), \quad N_{\bar{z}} = Ker(\,A^* - zI\,) \quad (\,Im\, z \ne 0\,)$$

– дефектные подпространства оператора A, а $U\colon\ N_{\bar{z}} \to N_z$ – произвольный унитарный оператор. Рассмотрим линейные операторы Γ_1 и Γ_2, определяемые на линеале $D(A^*)$ равенствами

$$\Gamma_1 x = \bar{z}x_z + zUx_{\bar{z}}, \qquad \Gamma_2 x = x_z + Ux_{\bar{z}}, \tag{6}$$

где

$$x = x_0 + x_z + x_{\bar{z}} \quad (x_0 \in D(A),\ \ x_z \in N_z, \quad x_{\bar{z}} \in N_{\bar{z}}).$$

Если $x=0$, то $x_0 = x_z = x_{\bar{z}} = 0$ (так как линеалы $D(A), N_z$ и $N_{\bar{z}}$ линейно независимы) и, следовательно, операторы Γ_1 и Γ_2 корректно определены. При этом каждый из этих операторов отображает $D(A^*)$ в N_z.

Покажем, что тройка $(N_z, \Gamma_1, \Gamma_2)$ есть ПГЗ оператора A. Действительно, на основании формул фон Неймана,

$$A^* x = Ax_0 + \bar{z}x_z + zx_{\bar{z}}.$$

Аналогично, если $y = y_0 + y_z + y_{\bar{z}}$, то

$$A^* y = Ay_0 + \bar{z}y_z + zy_{\bar{z}}.$$

Но тогда, учитывая равенства

$$(Ax_0, y_s) = s(x, y_s),\ (Ay_0, x_s) = s(y_0, x_s),\ (s \in \{z, \bar{z}\}),$$

получим, после соответствующих преобразований, что

$$(A^* x, y) - (x, A^* y) = (\bar{z} - z)[\,(x_z, y_z) - (x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}})\,]. \tag{7}$$

С другой стороны, учитывая равенства (6),

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 y) - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y) = (\bar{z} - z)[(x_z, y_z) - (x_{\bar{z}}, y_{\bar{z}})]. \tag{8}$$

Таким образом, на основании (7) и (8), операторы A^*, Γ_1 и Γ_2 связаны равенством (2).

Пусть f и g - произвольные векторы из N_z. Рассмотрим вектор $x = x_z + x_{\bar{z}}$, где

$$x_z = (z - \bar{z})^{-1}(zg - f), \quad x_{\bar{z}} = (z - \bar{z})^{-1}U^{-1}(f - \bar{z}g). \tag{9}$$

Эти векторы принадлежат соответственно подпространствам N_z и $N_{\bar{z}}$, причем, на основании равенств (6) и (9),

$$\Gamma_1 x = f, \quad \Gamma_2 x = g$$

А это означает, в соответствии с определением 1, что тройка $(N_z, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений оператора A.

Отметим, что ПГЗ оператора A определяется неоднозначно. Действительно, пусть (X, Γ_1, Γ_2) – пространство граничных значений симметрического оператора $A, \widetilde{X}$ – гильбертово пространство и такое, что $dim\,\widetilde{X} = dim\,X$, а $V : X \to \widetilde{X}$ произвольный унитарный оператор. Тогда, как легко убедиться, пространством граничных значений оператора A будет также и тройка $(\widetilde{X}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$, где $\widetilde{\Gamma}_\kappa = V\Gamma_\kappa$ $(k = 1, 2)$.

2. Эрмитовы операторы. В случае неплотно заданных эрмитовых операторов сформулированное определение ПГЗ уже непригодно для применений. В то же время предыдущие результаты дают возможность модифицировать определение 1 так, чтобы оно было пригодным и в случае неплотно заданных операторов. Действительно, учитывая теорему 2, вместо операторов Γ_1 и Γ_2 можем рассматривать (при фиксированном $z, Im\,z \neq 0$) их сужения на линеал $L_z = N_z + N_{\bar{z}}$. Для указанных сужений будем пользоваться теми же обозначениями: Γ_1 и Γ_2. Это дает возможность без ограничения общности заменить равенство (2) равенством (8), где операторы Γ_1 и Γ_2 определяются равенствами (6).

Пусть A – эрмитов оператор, действующий в H и $H_0 = D(A) \vee \Delta_A$ – замыкание линейной оболочки многообразий $D(A)$ и Δ_A, где $\Delta_A = (A - zI)\,D(A)$. Если $H_0 \neq H$, то ни свойства элементов подпространства $H - H_0$, ни свойства этого подпространства не влияют на свойства оператора A. Поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $H = H_0$, то есть

$$H = D(A) \vee \Delta_A. \tag{10}$$

Не подчеркивая это каждый раз, будем считать, что рассматриваемый эрмитов оператор A удовлетворяет условию (10).

Но тогда, как показано в [1] (стр.16) и в [3] (теорема 3.8), при $\operatorname{Im} z \neq 0$ дефектные подпространства N_z и $N_{\bar{z}}$ оператора Aлинейно независимы.

Учитывая сказанное, естественным является следующее определение.

Определение 2. Тройка(X, Γ_1, Γ_2), где X – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\bullet,\bullet)_X$, а Γ_1 и Γ_2 – линейные отображения линеала $L_z = N_z + N_{\bar{z}}$ в X, называется *пространством граничных значений* эрмитова оператора A, если:

1. Для произвольных $x = x_z + x_{\bar z}$ и $y = y_z + y_{\bar z}$ из L_z, имеет место равенство

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_x - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_x = (\bar z - z)[(x_z, y_z) - (x_{\bar z}, y_{\bar z})]. \qquad (11)$$

2. Для произвольных f и g из X существует такой вектор $X \in L_z$, что

$$\Gamma_1 x = f, \quad \Gamma_2 x = g$$

Если оператор A симметрический, то, на основании предыдущего, определения 1 и 2 эквивалентны.

Отметим, что определение 2 было предложено в работах [9, 10]. Это впервые дало возможность исследовать методами ПГЗ эрмитовы неплотно заданные операторы.

Позже, в случае неплотно заданных эрмитовых операторов предлагались и другие определения ПГЗ (подробнее см. [3]).

Приведем основные утверждения относительно ПГЗ эрмитовых операторов.

Теорема 4. Для произвольного эрмитова оператора с индексом дефекта (n,n) $(n \le \infty)$ при условии (10) существует ПГЗ (X, Γ_1, Γ_2), где $\dim X = n$.

Доказательство. Так же, как и при обосновании теоремы 3, рассмотрим операторы Γ_1 и Γ_2, которые определяются соотношениями (6), где $x = x_z + x_{\bar z}$. Рассматриваемые операторы корректно определены и каждый из них является линейным отображением линеала $L_z = N_z + N_{\bar z}$ в N_z. При этом, если $x = x_z + x_{\bar z}$ и $y = y_z + y_{\bar z}$ – произвольные векторы из L_z, то достаточно просто проверяется справедливость равенства (9).

Существование такого вектора $x = x_z + x_{\bar z}$, что при заданных векторах f и g из X

$$\Gamma_1 x = f, \quad \Gamma_2 x = g,$$

обосновывается также, как и при обосновании теоремы 3.

Теорема 5. *Если* (X, Γ_1, Γ_2) *– ПГЗ эрмитова оператора* A, *то линеалы* $Ker\Gamma_1$ *и* $Ker\Gamma_2$ *линейно независимы и*

$$Ker\Gamma_1 + Ker\Gamma_2 = N_z + N_{\bar z}. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_1 x = \Gamma_2 x = 0$, где $x = x_z + x_{\bar z} \in L_z$. Тогда, на основании равенства (11), при любом $y = y_z + y_{\bar z}$ из L_z

$$(x_z, y_z) - (x_{\bar z}, y_{\bar z}) = 0. \qquad (13)$$

В частности, при $y_z = x_z$ и $y_{\bar z} = -x_{\bar z}$ равенство (13) перепишется в виде $\|x_z\|^2 + \|x_{\bar z}\|^2 = 0$ и, следовательно, $x = 0$.

Таким образом линеалы $Ker\Gamma_1$ и $Ker\Gamma_2$ линейно независимы. При этом $Ker\Gamma_\kappa \subset L_z$ $(k = 1, 2)$ и, следовательно,

$$Ker\Gamma_1 + Ker\Gamma_2 \subset L_z . \qquad (14)$$

Покажем, что имеется место и обратное включение. Действительно, пусть $x \in L_z$. Рассмотрим в X векторы $f = 0$ и $g = \Gamma_2 x$. На основании определения ПГЗ в L_z существует такой вектор x_1, что $\Gamma_1 x_1 = 0$ (то есть, $x_1 \in Ker\Gamma_1$) и $\Gamma_2 x_1 = g$. Но тогда, если $x_2 = x - x_1$, то $\Gamma_2 x_2 = 0$. Следовательно, вектор $x = x_1 + x_2 \in Ker\Gamma_1 + Ker\Gamma_2$, что, учитывая включение (14), и завершает обоснование равенства (12).

При исследовании широкого класса расширений (регулярных расширений [3]) эрмитовых операторов полезными также являются следующие утверждения, которые приводим без обоснования.

Теорема 6. *Если $A-$ эрмитов оператор с индексом дефекта* (n,n) $(n \le \infty)$ *и* $(X, \Gamma_1, \Gamma_2) -$ *ПГЗ этого оператора, то*

$$\dim Ker\Gamma_1 = \dim Ker\Gamma_2 = \dim X = n$$

Теорема 7. *Если* $(X, \Gamma_1, \Gamma_2) -$ *ПГЗ эрмитова оператора* A, *то*

$$Ker\Gamma_\kappa = (I + V_k) N_z \qquad (k = 1,2),$$

где $N_z -$ дефектное подпространство оператора A, а $V_k : N_z \to N_{\bar{z}} -$ унитарные операторы.

3. Эрмитовы операторы с произвольными дефектными числами.

В случае симметрических (плотно заданных) операторов с различными дефектными числами понятие ПГЗ впервые было предложено в 1984 году в работе Сторожа [11]

В наиболее общем случае, когда эрмитов оператор не обязательно плотно задан, а дефектные числа не обязательно равны, понятие ПГЗ было предложено в работе С. Кужеля [12].

Приведем соответствующее определение из [12] (см. также [3]).

Пусть A – замкнутый эрмитов оператор с произвольными (не обязательно равными) дефектными числами, который действует в H. Как и раньше предполагаем, что имеет место равенство (10) и, таким образом, при $\operatorname{Im} z \ne 0$ дефектные подпространства N_z и $N_{\bar{z}}$ оператора A линейно независимы. Пусть, кроме того, S – каноническое расширение оператора A (в смысле работ [3,13,14]).

Определение 3. Четверка $(X_+, X_-, \Gamma_+, \Gamma_-)$, где X_+ и $X_- -$ гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\bullet,\bullet)_+$ и $(\bullet,\bullet)_-$, а Γ_+ и $\Gamma_- -$ линейные отображения $D(S)$ и $D(S^*)$ соответственно на X_+ и X_-, называется *пространством граничных значений (ПГЗ)* оператора, если:

1. $(Sx, x)_+ - (x, Sx)_+ = i \|\Gamma_+ x\|_+^2 \qquad (x \in D(S))$,
2. $(S^* y, y)_- - (y, S^* y)_- = -i \|\Gamma_- y\|_-^2 \qquad (y \in D(S^*))$.

Отметим следующие утверждения относительно ПГЗ $(X_+, X_-, \Gamma_+, \Gamma_-)$.

Теорема 8. *Для произвольного эрмитова оператора A с индексом дефекта (m,n) существует ПГЗ $(X_+, X_-, \Gamma_+, \Gamma_-)$, где*

$$\dim X_+ = n, \quad \dim X_- = m$$

Теорема 9. *Если $(X_+, X_-, \Gamma_+, \Gamma_-)$ – ПГЗ оператора A, то*

$$Ker\Gamma_+ = Ker\Gamma_- = D(A).$$

Теорема 10. *Если A – замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (n,n), то определения 1 и 3 равносильны.*

Здесь мы не касаемся применений пространств граничных значений как симметрических, так и эрмитовых операторов.

Список использованной литературы

1. Кужель А.В. Расширения эрмитовых операторов.- К.: Вища школа, 1989.-56с.
2. Kuzhel A. Characteristic Functions and Models of Nonself-Adjoint Operators.- Kluwer. Dordrecth / Boston / London, 1966. -273p.
3. Kuzhel A.V. and Kuzhel S.A. Regular Extensions of Hermitian Operators.- VSP, Utrecht, 1998.- 272p.
4. Талюш М.О. Типова структура дисипативних операторів // Доп. АН УРСР.- 1973.- Сер. А, №11.- С.993-996.
5. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Матем. Заметки.- 1975.-Т.17, №1.- С.41-48.
6. Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Матем. сб. - 1976.- Т.100, №2.- С.210-216.
7. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.- К.: Наук. Думка, 1984.- 283с.
8. Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н. Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн.- 1989.- Т.41, №10.- С.1299-1313.
9. Кужель А.В., Карпенко И.И. Пространства граничных значений эрмитовых операторов // Деп. Укр. НИИНТИ.- 1989.- №766, Ук.89 - 8с.
10. Кужель А.В., Карпенко И.И. Пространства граничных значений неплотно заданного эрмитова оператора // Тезисы XIV школы по теории операторов… (Новгород).- 1989.- ч.П.- С.39.
11. Сторож О.Г. О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Матем. заметки.- 1984.- Т.36, №5.- С.791-796.
12. Кужель С.А. О пространствах граничных значений и регулярных расширениях эрмитовых операторов // Укр. матем. журн.- 1990.- Т.42, №6.- С.860-865.
13. Кужель О.В. Канонічні розширення ермітових операторів // Тези 6-ої Міжнародної конференції ім.акад. Кравчука. (Київ). 1997.- С.229.
14. Кужель А.В. Канонические расширения эрмитовых операторов // Динамич. Системы.- 1998. Вып. 14.- С.173-176.

Поступила в редколлегию 19.09.2001 г.