УДК 517.98

И.В. ОРЛОВ, канд. физ.-мат. наук, доц., Таврический нац. ун-т

КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Классическое условие положительной определенности квадратичных форм в банаховом пространстве обобщается на квадратичные формы в локально выпуклом пространстве.

1.1. Определение. Пусть E – ЛВП с определяющей системой преднорм $\left\{\|\cdot\|_t\right\}_{t\in T}$, где T индуктивно упорядочено в соответствии с возрастанием преднорм:

$$(t_1 \le t_2) \Rightarrow (\|\cdot\|_{t_1} \le K_{t_1 t_2} \|\cdot\|_{t_2}). \tag{1}$$

Если $f \in E^*$, то найдется такой индекс $t = t(f) \in T$ (определяемый с точностью до возрастания), что

$$\| f \|^t := \sup_{\|x\|_t \le 1} | f(x) | < +\infty. \tag{2}$$

Назовем t *нормальным индексом* линейного непрерывного функционала f, а величину $\| f \|^t$ – *ко-нормой* f (с индексом t). Для всякого $t \in T$ обозначим также

$$E_t^* = \{ f \in E^* \mid \| f \|^t < +\infty \}. \tag{3}$$

1.2. Замечание. Нормальные индексы представляют собой частный случай проективных индексов функционалов [1] и вводились в [2]. В ([3], п.2.3) отмечалась связь нормальных индексов с известной в теории двойственности l -топологией ([4], 8.4.14–8.4.18).

1.3. Теорема. *Пространства* $(E_t^*, \|\cdot\|^t)$ *образуют разложение* E^* *в индуктивную шкалу банаховых пространств.*

Доказательство. Из (1) и (3), очевидно, следует, что $\|\cdot\|^t$ – преднорма в E_t^*. Далее, если $\| f \|^t = 0$, то $f(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля в E, откуда $f = 0$, т.е. $\|\cdot\|^t$ – норма в E_t^*. Так как $(E_t^*, \|\cdot\|^t)$ можно рассматривать как сильное сопряженное к $(E, \|\cdot\|_t)$, то E_t^* полно относительно нормы $\|\cdot\|^t$. Таким образом, $(E_t^*, \|\cdot\|^t)$ – банаховы пространства ($t \in T$).

Далее, из (1) и (2) следует

$$(t_1 \le t_2) \Rightarrow (\| f \|^{t_2} \le K_{t_1 t_2} \cdot \| f \|^{t_1} \text{ при } f \in E_{t_1}^*), \tag{4}$$

что означает непрерывность вложений $(E^*_{t_1},\|\cdot\|^{t_1}) \underset{\rightarrow}{\subseteq} (E^*_{t_2},\|\cdot\|^{t_2})$. Индуктивность порядка в T влечет индуктивность построенной шкалы: если $t_1 \le t_3$, $t_2 \le t_3$, то

$$E^*_{t_1} \underset{\rightarrow}{\subseteq} E^*_{t_3},\ E^*_{t_2} \underset{\rightarrow}{\subseteq} E^*_{t_3}.$$

Наконец, т.к. каждый элемент $f \in E^*$ имеет нормальный индекс, то

$$\bigcup_{t \in T} E^*_t = E^*,$$

т.е. сумма построенной шкалы равна E^*.

1.4. Определение. Назовем построенное разложение *нормальным разложением* E^* и обозначим его $\overrightarrow{E^*}$:

$$\overrightarrow{E^*} = \{(E^*_t, \|\cdot\|^t)\}_{t \in T}.$$

Индуктивный предел шкалы $\overrightarrow{E^*}$ (т.е. пространство E^* с индуктивной топологией относительно вложений $E^*_t \underset{\rightarrow}{\subseteq} E^*$) мы будем обозначать $\varinjlim \overrightarrow{E^*}$.

1.5. Замечание. Как показано в ([4], 8.4.14–8.4.18), топология индуктивного предела $\varinjlim \overrightarrow{E^*}$ – это так называемая l*-топология* в E^*, в широком классе пространств совпадающая с сильной топологией в E^*. Мы выделим случай, когда l-топология задается с помощью нормы.

1.6. Определение. Назовем ЛВП E *гладким*, если

$$(t_1 \le t_2) \Rightarrow \left(\forall x \in E : \varliminf_{\|h\|_{t_1} \to 0} \| x + h \|_{t_2} = \| x \|_{t_1} \right) \qquad (5)$$

1.7. Примеры гладких и не гладких ЛВП.

1) Пусть $E = C_{loc}(\mathbf{R})$ – пространство вещественных непрерывных функций на $\mathbf{R}$ с топологией локально равномерной сходимости, определяемой системой преднорм $\{\| x \|_t = \sup_{|s| \le t} | x(s) |\}_{t \ge 0}$. Тогда при $t_1 \le t_2$

$$\forall x \in E\, \exists h \in E, h \ne 0 : \| h \|_{t_1} = 0, \| x + h \|_{t_2} = \| x \|_{t_1}. \qquad (6)$$

Действительно, достаточно положить

$$h(s) = \begin{cases} 0, & | s | \le t_1; \\ x(t_1) - x(s), & s \ge t_1; \\ x(-t_1) - x(s), & s \le -t_1; \end{cases}$$

тогда

$$(x+h)(s)=\begin{cases} x(s), & |s|\le t_1; \\ x(t_1), & s\ge t_1; \\ x(-t_1), & s\le -t_1, \end{cases}$$

и условие (6) выполнено. Остается заметить, что (5) вытекает из (6) тривиальным образом. Аналогичным образом, все пространства $C^n_{loc}(\mathbf{R})$ – гладкие.

2) Пусть E – произвольное бесконечномерное ЛВП в слабой топологии $s\,(E,E^*)$, которой соответствует определяющее семейство преднорм

$$\{\|x\|_{(f_1,\mathbf{K},f_n)}=\max(|f_1(x)|,|f_2(x)|,\mathbf{K},|f_n(x)|)\}_{f_i\in E^*(i=\overline{1,n})};$$

здесь отношение порядка для индексов – включение. Для доказательства равенства (5) достаточно рассмотреть случай пары индексов $(t_1=f_1;\ t_2=(f_1,f_2))$. Пусть $x\in E$. Выберем $h\in E$ так, чтобы $h\in\ker f_1$, $x+h\in\ker f_2$ (это, очевидно, возможно, т.к. $\operatorname{codim}((x+\ker f_1)\ \mathbf{I}\ (\ker f_2))\le 2$). Тогда

$$\|h\|_{f_1}=|f_1(h)|=0,\ \|x+h\|_{f_2}=|f_2(x+h)|=0,$$

откуда $\|x+h\|_{f_1f_2}=\max\big(|f_1(x+h)|,|f_2(x+h)|\big)=|f_1(x)|=\|x\|_{f_1}$. Таким образом, здесь также выполнено соотношение (6), откуда следует (5). Заметим, что соответствующее нормальное разложение сопряженного пространства $\overrightarrow{E_s^*}$ есть шкала всех конечномерных подпространств E. Отметим также, что, в отличие от примера 1), здесь выбор h в (6) зависит от выбора $t_2\ge t_1$.

3) Пусть $E=C^\infty[0;1]$ со стандартной топологией, которой соответствует определяющая система преднорм $\{\|x\|_n=\sum_{k=0}^{n}\sup_{0\le s\le 1}|x^{(k)}(s)|\}_{n=0}^{\infty}$.

Пусть $x_n(s)=e^{ns}$, $h_n\in E$, $|h_n(s)|<1/n$, $y_n(s)=x_n(s)+h_n(s)$, где $n=1,2,\mathbf{K}$ фиксировано. Тогда $y_n(1)-y_n(1-\frac{1}{n})>[x_n(1)-x_n(1-\frac{1}{n})]-\frac{2}{n}$, откуда по теореме о среднем

$$y_n'(c)=\frac{y_n(1)-y_n(1-\frac{1}{n})}{1/n}>\frac{x_n(1)-x_n(1-\frac{1}{n})}{1/n}-2=\frac{e^n-e^{n-1}}{1/n}-2=ne^n(1-\tfrac{1}{e})-2,$$

и, следовательно,

$$\|y_n'\|_0=\sup_{0\le s\le 1}|y_n'(s)|>ne^n(1-\tfrac{1}{e})-2. \tag{7}$$

Из (6) следует

$$\|x_n+h_n\|_1=\|y_n\|_0+\|y_n'\|_0>(e^n-\tfrac{1}{n})+ne^n(1-\tfrac{1}{e})-2,$$

откуда

$$\varliminf_{\|h_n\|_0\to 0} \| x_n + h_n \|_1 \geq (e^n - \tfrac{1}{n}) + ne^n(1-\tfrac{1}{e}) - 2. \tag{8}$$

Т.к. $\| x_n \|_0 = e^n$, то из (7) получаем

$$\varliminf_{\|h_n\|_0\to 0} \| x_n + h_n \|_1 \geq (1 - \tfrac{1}{ne^n} + n(1-\tfrac{1}{e}) - \tfrac{2}{e^n}) \cdot \| x_n \|_0,$$

что при любом $n \geq 1$ противоречит (5) (где $t_1 = 0$, $t_2 = 1$). Таким образом, E не является гладким ЛВП.

1.8. Теорема. *Если E – гладкое ЛВП, то вложения в шкале $\overrightarrow{E^*}$ – изометрически изоморфные.*

Доказательство. Пусть $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \leq t_2$. Зафиксируем $f \in E^*_{t_1}$ и для всякого $e > 0$ выберем $x \in E$ так, чтобы

$$\frac{| f(x) |}{\| x \|_{t_1}} > \| f \|^{t_1} - e. \tag{9}$$

Выберем теперь, используя непрерывность f и условие (5), такое $h \in E$, с достаточно малой преднормой $\| h \|_{t_1}$, чтобы

$$\left| \frac{f(x+h)}{\| x+h \|_{t_2}} - \frac{f(x)}{\| x \|_{t_1}} \right| < e. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем

$$\| f \|^{t_2} \geq \frac{| f(x+h) |}{\| x+h \|_{t_2}} > \frac{| f(x) |}{\| x \|_{t_1}} - e > \| f \|^{t_1} - 2e,$$

откуда $\| f \|^{t_2} \geq \| f \|^{t_1}$. Так как $(\| \cdot \|_{t_1} \leq \| \cdot \|_{t_2}) \Rightarrow (\| f \|^{t_2} \leq \| f \|^{t_1})$, то $\| f \|^{t_2} = \| f \|^{t_1}$.

1.9. Следствие. *Если E – гладкое ЛВП, то пространство $\varinjlim \overrightarrow{E^*}$ нормируемо.*

Доказательство. Положим $\| f \|^* = \| f \|^t$ при $f \in E^*_t$, $t \in T$. В силу теоремы 1.8, определение корректно: если $f \in E^*_{t_1}$ и $f \in E^*_{t_2}$, то $f \in E^*_{t_3}$ при $t_3 \geq t_1, t_2$, откуда $\| f \|^{t_1} = \| f \|^{t_3} = \| f \|^{t_2}$. Очевидно, $\| f \|^*$ – норма в E^* и вложения $(E^*_t, \| \cdot \|^t) \subseteq (E^*, \| \cdot \|^*)$ непрерывны. Поскольку объединения единичных шаров из E^*_t образуют единичные шары в $(E^*, \| \cdot \|^*)$, то рассматриваемая топология в E^* – индуктивная.

Отметим, в частности, что в примере 1.7(2) индуктивная топология в $\varinjlim \overrightarrow{E^*_s}$ – сильнейшая локально выпуклая топология t_∞ в E^*.

1.10. Следствие. *Если E – счетно-нормированное гладкое ЛВП, то пространство $\varinjlim \overrightarrow{E^*}$ – банахово.*

Доказательство. Действительно, в этом случае мы получаем строгий индуктивный предел последовательности банаховых пространств, т.е. LB-пространство ([5], гл.II, 6.3–6.6), откуда и следует утверждение следствия.

2. Бинормальные индексы билинейных непрерывных форм в ЛВП.

2.1. Определение. Для заданных ЛВП E_1 и E_2 обозначим $(E_1,E_2)^*$ векторное пространство всех билинейных непрерывных форм на $E_1 \times E_2$. Если $g \in (E_1,E_2)^*$, то найдется такая пара индексов $(t_1,t_2) \in T_1 \times T_2$ (определяемых с точностью до возрастания), что

$$\| g \|^{t_1 t_2} := \sup_{\| x_1 \|_{t_1} \le 1, \| x_2 \|_{t_2} \le 1} | g(x_1,x_2) | < +\infty \tag{11}$$

Назовем (t_1,t_2) *бинормальным индексом* билинейной непрерывной формы g , а величину $\| g \|^{t_1 t_2}$ – *ко-нормой* g (с индексом (t_1,t_2)). Отметим, что при этом для любых $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$:

$$| g(x_1,x_2) | \le \| g \|^{t_1 t_2} \cdot \| x_1 \|_{t_1} \cdot \| x_2 \|_{t_2} . \tag{12}$$

Для всякого $(t_1,t_2) \in T_1 \times T_2$ обозначим также

$$(E_1,E_2)^*_{t_1 t_2} = \{ g \in (E_1,E_2)^* \big| \| g \|^{t_1 t_2} < +\infty \}. \tag{13}$$

2.2. Теорема. *Пространства* $((E_1,E_2)^*_{t_1 t_2}, \| \cdot \|^{t_1 t_2})$ *образуют разложение* $(E_1,E_2)^*$ *в индуктивную шкалу банаховых пространств (с покоординатным порядком:* $((t_1,t_2) \le (t_3,t_4)) \Leftrightarrow (t_1 \le t_3, t_2 \le t_4)$).

Доказательство. Из (11) и (13) очевидно следует, что $\| \cdot \|^{t_1 t_2}$ – преднормы в $(E_1,E_2)^*_{t_1 t_2}$. Далее, если $\| g \|^{t_1 t_2} = 0$, то из (12) следует $g = 0$, т.е. $\| \cdot \|^{t_1 t_2}$ – нормы. Т.к. $((E_1,E_2)^*_{t_1 t_2}, \| \cdot \|^{t_1 t_2})$ можно рассматривать как пространства билинейных непрерывных форм на $(E_1, \| \cdot \|_{t_1}) \times (E_2, \| \cdot \|_{t_2})$, то они полны относительно норм $\| \cdot \|^{t_1 t_2}$. Таким образом, рассматриваемые пространства – банаховы.

Далее, из аналогов неравенства (1) для E_1 и E_2 следует

$$\begin{pmatrix} t_1 \le t_3 \\ t_2 \le t_4 \end{pmatrix} \Rightarrow (\| g \|^{t_3 t_4} \le K^1_{t_1 t_3} \cdot K^2_{t_2 t_4} \cdot \| g \|^{t_1 t_2} \quad \text{при} \quad g \in (E_1,E_2)^*_{t_1 t_2}),$$

что означает непрерывность вложений $(E_1,E_2)^*_{t_1 t_2} \subseteq (E_1,E_2)^*_{t_3 t_4}$. Индуктивность построенной шкалы относительно покоординатного порядка в $T_1 \times T_2$ очевидна.

2.3. Определение. Назовем построенное разложение *бинормальным разложением* $(E_1, E_2)^*$ и обозначим его $\overrightarrow{(E_1, E_2)^*}$:

$$\overrightarrow{(E_1, E_2)^*} = \left\{ \left((E_1, E_2)^*_{t_1 t_2}, \|\cdot\|^{t_1 t_2} \right) \right\}_{(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2}.$$

2.4. Определение. Будем говорить, что A – *линейный непрерывный оператор из* E_1 *в шкалу* $\overrightarrow{E_2^*}$, если A – линейный непрерывный оператор из E_1 в некоторое пространство $E^*_{2t_2}$ $(t_2 \in T_2)$ шкалы $\overrightarrow{E_2^*}$. Обозначим множество всех линейных непрерывных операторов из E_1 в $\overrightarrow{E_2^*}$ через $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]$.

2.5. Определение. Если $A \in \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]$, то найдется такое $t_2 \in T_2$, что $A \in [E_1, E^*_{2t_2}]$. Следовательно, найдется $t_1 \in T_1$, что

$$\| A \|^{t_2}_{t_1} := \sup_{\|x_1\|_{t_1} \le 1} \| A x_1 \|^{t_2} < \infty. \tag{14}$$

Назовем пару индексов (t_2, t_1) (определяемых с точностью до возрастания) *нормальным индексом* оператора A, а величину $\| A \|^{t_2}_{t_1}$ – *конормой* A. Отметим, что при этом для любых $x_1 \in E_1$

$$\| A x_1 \|^{t_2} \le \| A \|^{t_2}_{t_1} \cdot \| x_1 \|_{t_1}. \tag{15}$$

Для всякого $(t_2, t_1) \in T_2 \times T_1$ обозначим также

$$\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]^{t_2}_{t_1} = \left\{ A \in \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right] \middle| \, \| A \|^{t_2}_{t_1} < +\infty \right\}. \tag{16}$$

2.6. Теорема. *Пространства* $\left(\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]^{t_2}_{t_1}, \|\cdot\|^{t_2}_{t_1} \right)$ *образуют разложение* $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]$ *в индуктивную шкалу банаховых пространств (с покоординатным порядком).*

Доказательство. Из (14) и (16) очевидно следует, что $\|\cdot\|^{t_2}_{t_1}$ – преднормы в $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]$. Далее, если $\| A \|^{t_2}_{t_1} = 0$, то из (15) следует $A = 0$, т.е. $\|\cdot\|^{t_2}_{t_1}$ – нормы. Т.к. $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]^{t_2}_{t_1}$ можно рассматривать как пространства непрерывных линейных операторов из $(E_1, \|\cdot\|_{t_1})$ в $(E^*_{2t_2}, \|\cdot\|^{t_2})$, то они полны относительно норм $\|\cdot\|^{t_2}_{t_1}$. Таким образом, рассматриваемые пространства – банаховы.

Далее, из аналогов неравенства (1) для E_1 и неравенства (4) для E_2^* следует

$$\begin{pmatrix} t_1 \le t_3 \\ t_2 \le t_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\| A \|_{t_3}^{t_4} \le K_{t_1 t_3}^1 \cdot K_{t_2 t_4}^2 \cdot \| A \|_{t_1}^{t_2} \quad \text{при} \quad A \in [E_1, \overrightarrow{E_2^*}]_{t_1}^{t_2} \right),$$

что означает непрерывность вложений $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2} \underset{\to}{\subseteq} \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_3}^{t_4}$.

2.7. Определение. Назовем построенное разложение *нормальным разложением* $\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]$ и обозначим его $\overline{\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]}$:

$$\overline{\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]} = \left\{ \left(\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2}, \| \cdot \|_{t_1}^{t_2} \right) \right\}_{(t_2, t_1) \in T_2 \times T_1}.$$

2.8. Теорема. *Имеет место изометрический изоморфизм:*

$$\overrightarrow{(E_1, E_2)^*} \cong \overline{\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]}.$$

Точнее говоря, при каноническом соответствии $(Ax_1)x_2 = g_A(x_1, x_2)$ *для любой пары индексов* $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$*:*

$$(E_1, E_2)_{t_1 t_2}^* \cong \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2}; \quad \| A \|_{t_1}^{t_2} = \| g_A \|^{t_1 t_2}. \tag{17}$$

Доказательство. 1) Пусть $g \in (E_1, E_2)_{t_1 t_2}^*$, $Ax_1 = g(x_1, \cdot)$, откуда $g = g_A$. Из (2) и (15) получаем

$$| g_A(x_1, x_2) | = | (Ax_1)x_2 | \le \| Ax_1 \|^{t_2} \| x_2 \|_{t_2} \le \| A \|_{t_1}^{t_2} \| x_1 \|_{t_1} \| x_2 \|_{t_2},$$

откуда с учетом (12), получаем

$$\| g_A \|^{t_1 t_2} \le \| A \|_{t_1}^{t_2}. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2} \underset{\to}{\overset{\sim}{\subseteq}} (E_1, E_2)_{t_1 t_2}^*. \tag{19}$$

2) Обратно, пусть $A \in \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2}$. Из (12) получаем

$$| (Ax_1)x_2 | = | g_A(x_1, x_2) | \le \| g_A \|^{t_1 t_2} \| x_1 \|_{t_1} \| x_2 \|_{t_2},$$

откуда, с учетом (2) и (14), получаем

$$\left(\| Ax_1 \|^{t_2} \le \| g_A \|^{t_1 t_2} \| x_1 \|_{t_1} \right) \Rightarrow \left(\| A \|_{t_1}^{t_2} \le \| g_A \|^{t_1 t_2} \right). \tag{20}$$

Следовательно,

$$(E_1, E_2)_{t_1 t_2}^* \underset{\to}{\overset{\sim}{\subseteq}} \left[E_1, \overrightarrow{E_2^*} \right]_{t_1}^{t_2}. \tag{21}$$

3) Из (18), (19), (20) и (21) следует (17).

3. Квадратичные непрерывные формы в ЛВП

3.1. Определение.([6], гл.1, 8.2) Если E – векторное пространство, то *квадратичная форма* j на E есть однородный многочлен 2-ой степени, порожденный некоторой билинейной формой g на $E\times E: j(x)=g(x,x)$.

Если E – ЛВП, то, очевидно, форма j *непрерывна* тогда и только тогда, когда непрерывна g, т.е. $g\in(E,E)^*$. Назовем *бинормальным индексом* квадратичной непрерывной формы j бинормальный индекс (t_1,t_2) ассоциированной билинейной формы g.

3.2. Замечание. Из определения 3.1 и неравенства (12) следует, что если (t_1,t_2) – бинормальный индекс непрерывной квадратичной формы j, то для любого $x\in E$:

$$|j(x)|\le\|j\|^{t_1t_2}\cdot\|x\|_{t_1}\cdot\|x\|_{t_2}.$$

Выбрав, в частности, $t\ge t_1,t_2$, получаем:

$$\exists t\in T\ \forall x\in E: |j(x)|\le\|j\|^{tt}\cdot(\|x\|_t)^2. \tag{22}$$

Это позволяет в дальнейшем отождествить бинормальные индексы квадратичных форм с элементами $t\in T$. Отметим также, что обратная связь между j и g устанавливается формулой

$$g(x_1,x_2)=\tfrac{1}{2}[j(x_1+x_2)-j(x_1)-j(x_2)],$$

а независимое от g определение j имеет вид:

$$j(l_1x_1+l_2x_2)=l_1^2j(x_1)+l_2^2j(x_2)+l_1l_2[j(x_1+x_2)-j(x_1)-j(x_2)].$$

3.3. Определение. Пусть j – непрерывная квадратичная форма на полном ЛВП E, g – ассоциированная билинейная форма. По теореме 2.8 об изоморфизме g можно рассматривать как непрерывный линейный оператор $g:(E,\|\cdot\|_{t_1})\to(E^*_{t_2},\|\cdot\|^{t_2})$ при достаточно больших $t_1,t_2\in T$. Кроме того, по классической теореме о проективном пределе ([5], гл. II, 5.4) E можно рассматривать как проективный предел банаховых пространств, и считать, что $\|\cdot\|_t$ – нормы на E.

Назовем форму j *невырожденной*, если при некоторых $t_1,t_2\in T$ оператор $g:(E,\|\cdot\|_{t_1})\to(E^*_{t_2},\|\cdot\|^{t_2})$ является изоморфизмом. Если форма j невырожденна и *неотрицательна*, т.е. $j(x)\ge 0$, то назовем форму j *положительно определенной*: $j>>0$ на E.

3.4. Замечание. Из классического неравенства Шварца ([6], гл. 1, 8.2) для неотрицательных квадратичных форм

$$|g(x,y)|\le j(x)\cdot j(y) \tag{23}$$

следует, что если $j>>0$, то $j(x)>0$ при $x\ne 0$.

3.5. Предложение. *Если квадратичная форма* j *невырожденна,* g *– ассоциированная билинейная форма, то*

$$(\forall x_2 \in E : g(x_1, x_2) = 0) \Rightarrow (x_1 = 0). \qquad (24)$$

Доказательство. Действительно, условие (24) означает, что оператор $g : (E, \| \cdot \|_{t_1}) \to (E^*_{t_2}, \| \cdot \|^{t_2})$ (см. опр. 3.3) имеет нулевое ядро, что является необходимым условием изоморфизма.

3.6. Теорема (необходимое условие положительной определенности). *Если* j *положительно определенная квадратичная форма на полном ЛВП* E*, то найдется такой индекс* $t \in T$ *и константа* $C_t > 0$*, что для всех* $x \in E$

$$j(x) \geq C_t \cdot \| x |_t^2 . \qquad (25)$$

Доказательство. 1. В силу неравенства (22) $j(x)$ ограничена на шарах $\| x \|_t \leq 1$ при больших $t \in T$:

$$0 \leq j(x) \leq M_t . \qquad (26)$$

2. Т.к. ассоциированный оператор $g : (E, \| \cdot \|_{t_1}) \to (E^*_{t_2}, \| \cdot \|^{t_2})$ есть изоморфизм, то обратный оператор g^{-1} непрерывен на $(E^*_{t_2}, \| \cdot \|^{t_2})$. Следовательно, найдется такая константа $K_{t_1 t_2} < \infty$, что при всех $x_1 \in E$

$$\| x_1 \|_{t_1} \leq K_{t_1 t_2} \cdot \| g(x_1, \cdot) \|^{t_2} . \qquad (27)$$

3. Фиксируем $x_1 \in E$ и, используя (11), выберем $x_2 \in E$ так, чтобы $\| x_2 \|_{t_2} \leq 1$ и

$$| g(x_1, x_2) | \geq \tfrac{1}{2} \| g(x_1, \cdot) \|^{t_2} . \qquad (28)$$

Из (27) и (28) следует при $\| x_2 \|_{t_2} \leq 1$

$$\| x_1 \|_{t_1} \leq 2K_{t_1 t_2} \cdot | g(x_1, x_2) | . \qquad (29)$$

Из (29), в силу неравенства Шварца (23), получаем

$$(\| x_1 \|_{t_1})^2 \leq 4K^2_{t_1 t_2} j(x_1) j(x_2) . \qquad (30)$$

Наконец, из (26) и (30) получаем (считая $t_1 \leq t_2$, $t = t_2$, $x = x_2$)

$$(\| x_1 \|_{t_1})^2 \leq 4K^2_{t_1 t_2} \cdot M_{t_2} \cdot j(x_1) . \qquad (31)$$

Полагая в (31) $t_1 = t_2 = t$, $C_t = 1/4K^2_{tt} M_t$ и $x = x_1$, получаем (25).

Список использованной литературы

1. Orlov I.V. Banach-Grothendieck theorem for the scales of spaces //Spectral and Evolutionary Problems: Proceedings of the Tenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. Vol.10 - Simferopol, 2000. - P. 35-39.

2. Orlov I.V. A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces // Operator Theory. Advances & Appl. -V.118. - Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2000. - P.321-333.
3. Орлов И.В. Теорема Макки-Аренса для шкал пространств //Динамические системы. - Симферополь: «КФТ», 2000. - Вып.16. - С.165-171.
4. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. - М.: Мир, 1969. - 1072 с.
5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. - М.: Мир, 1971. - 360с.
6. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. - М.: Мир. 1971.- 392 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2001 г.