

ПАПКОВА Ю.И., аспирант, ЯРОШЕНКО А.А., канд. физ-мат. наук,
Севастопольский государственный технический университет

ПОЛЕ АКУСТИЧЕСКОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ВЫСТУПОМ.

Предлагается численно-аналитическое решение задачи о распространении звукового поля гармонического точечного источника, расположенного над подводным круговым выступом. Граничные условия на горизонтальных стенках волновода выполняются точно, условия непрерывности звуковых полей и условие отражения на вертикальной стенке волновода приведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которое получено методом редукции. Приводится качественное исследование возникающих звуковых полей.

Рассматривается акустический волновод (рис. 1) имеющий подводный выступ с радиальной симметрией, над центром которого расположен гармонический источник звука. Распространение звуковых волн данным источником описывается уравнением Гельмгольца и условиями на стенках волновода:

$$\Delta F + \left[\frac{w}{c(z)} \right]^2 F = - \frac{d(r)d(z-z_0)}{2pr}, \quad (1)$$

$$F(0, r) = 0; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_L = 0. \quad (2)$$

где L – контур дна, F – потенциал скоростей.

Краевые условия (2) отвечают условиям мягкой поверхности (полное поглощение) и абсолютно жесткого дна (полное отражение). Кроме того, на потенциал скоростей накладывается условие излучения Зоммерфельда [1]. Профиль скорости звука $c(z)$ предполагается зависящим только от глубины и является характеристикой гидроакустических свойств волновода.

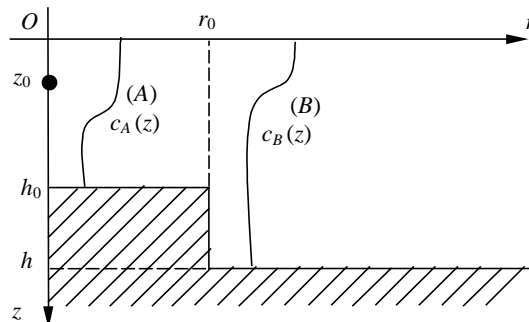


Рис. 1 - Гидроакустический волновод

Для волновода без выступа (плоскопараллельные границы) полное решение задачи получено Л.В.Бреховских [1], С.І.Рекерис'ом [2] и рядом других авторов. Здесь сложности возникают, как правило, при учете вертикальной неоднородности профиля скорости звука $c(z)$, что приводит либо к аппроксимации профиля скорости звука по семейству более удобных кривых, либо к интегральным и асимптотическим представлениям решения. Для неровного дна, даже в простейшей модели жесткого дна, исчерпывающего решения задачи нет. Здесь выделим два подхода: первый -- численный, применяемый достаточно давно, использует методы конечных разностей, конечных элементов и др. (обзор этих методов содержится в [3]), и второй -- асимптотический подход, появившийся сравнительно недавно ([4] и др.). Ниже используется несколько иной подход к решению данной задачи, имеющий своим аналогом метод однородных решений в теории упругости.

Проведем декомпозицию области волновода на две (A) и (B) (см. рис. 1). В каждой из данных областей методом разделения переменных строятся общие решения (1), удовлетворяющие граничным условиям на горизонтальных стенках волновода и условиям излучения, и имеющие каждое по одной последовательности неопределенных коэффициентов:

$$F_A = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_{A,n}(z_0) j_{A,n}(z)}{\int_0^{h_0} j_{A,n}^2(s) ds} H_0^{(1)}(x_n^A r) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n j_{A,n}(z) J_0(x_n^A r),$$

$$F_B = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_{B,n}(z) H_0^{(1)}(x_n^B r). \quad (3)$$

где x_n^A , $j_{A,n}$, x_n^B , $j_{B,n}$ собственные числа и функции соответствующих задач Штурма-Лиувилля:

$$j_A'' + \left(\frac{w^2}{c_A^2(z)} - x^2 \right) j_A = 0, \quad j_A(0) = 0, j_A'(h_0) = 0;$$

$$j_B'' + \left(\frac{w^2}{c_B^2(z)} - x^2 \right) j_B = 0, \quad j_B(0) = 0, j_B'(h) = 0. \quad (4)$$

Примеры построения данных собственных функций и чисел при кусочно-линейной аппроксимации произвольного профиля скорости звука представлены в статье [5].

Последовательности $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ позволяют удовлетворить условия непрерывности полей звукового давления и радиальной скорости на границе $r = r_0$ ($z \in [0; h_0]$) и условию жесткого дна на вертикали $r = r_0$ ($z \in [h_0; h]$):

$$F_A(z; r_0) = F_B(z; r_0), z \in [0; h_0];$$

$$\frac{\partial F_B}{\partial r}(z; r_0) = \begin{cases} \frac{\partial F_A}{\partial r}(z; r_0), & z \in [0; h_0] \\ 0, & z \in [h_0; h] \end{cases}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражения для потенциала скоростей (3), получаем два функциональных равенства с двумя неопределенными последовательностями $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$. Используя ортогональность собственных функций краевой задачи (4), получаем для определения неизвестных коэффициентов бесконечную систему линейных алгебраических уравнений над полем комплексных чисел:

$$\begin{cases} X_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} Y_n + j_m; \\ Y_m = \sum_{n=0}^{\infty} b_{m,n} X_n + y_m. \end{cases} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

$$\text{где } X_n = J_1(x_n^A r_0) A_n; \quad Y_n = H_0^{(1)}(x_n^B r_0) B_n;$$

$$a_{m,n} = \frac{J_1(x_m^A r_0)}{J_0(x_m^A r_0)} \cdot \frac{\int_0^{h_0} j_{A,m}(z) j_{B,n}(z) dz}{\int_0^{h_0} j_{A,m}^2(z) dz}; \quad b_{m,n} = \frac{x_n^A H_0^{(1)}(x_m^B r_0)}{x_m^B H_1^{(1)}(x_m^B r_0)} \cdot \frac{\int_0^{h_0} j_{B,m}(z) j_{A,n}(z) dz}{\int_0^{h_0} j_{B,m}^2(z) dz};$$

$$y_m = \frac{i}{4} \cdot \frac{1}{x_m^B} \cdot \frac{H_0^{(1)}(x_m^B r_0)}{H_1^{(1)}(x_m^B r_0)} \cdot \frac{1}{\int_0^h j_{B,m}^2(z) dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n^A \int_0^{h_0} j_{B,m}(z) j_{A,n}(z) dz}{\int_0^{h_0} j_{A,n}^2(z) dz} j_{A,n}(z_0) H_1^{(1)}(x_n^A r_0);$$

$$j_m = -\frac{i}{4} \frac{J_1(x_m^A r_0)}{J_0(x_m^A r_0)} \cdot \frac{j_{A,m}(z_0) H_0^{(1)}(x_m^A r_0)}{\int_0^{h_0} j_{A,m}^2(z) dz}.$$

Для случая постоянного в каждой из областей декомпозиции профиля скорости звука коэффициенты бесконечной системы имеют следующий вид:

$$a_{m,n} = (-1)^m \frac{h}{ph_0} \frac{J_1(x_m^A r_0)}{J_0(x_m^A r_0)} \cdot \frac{(2n+1) \cos \frac{ph_0}{h} (n + \frac{1}{2})}{(m + \frac{1}{2})^2 - \frac{h_0^2}{h^2} (n + \frac{1}{2})^2};$$

$$b_{m,n} = (-1)^{n+1} \frac{x_n^A}{px_m^B} \frac{H_0^{(1)}(x_m^B r_0)}{H_1^{(1)}(x_m^B r_0)} \cdot \frac{(2m+1) \cos \frac{ph_0}{h} (m + \frac{1}{2})}{(m + \frac{1}{2})^2 - \frac{h^2}{h_0^2} (n + \frac{1}{2})^2};$$

$$j_m = -\frac{i}{2h_0} \frac{J_1(x_m^A r_0)}{J_0(x_m^A r_0)} \cdot \sin \frac{pz_0}{h_0} (m + \frac{1}{2}) H_0^{(1)}(x_m^A r_0);$$

$$Y_m = \frac{i}{2ph_0} \cdot \frac{(2m+1)}{x_m^B} \cdot \frac{H_0^{(1)}(x_m^B r_0)}{H_1^{(1)}(x_m^B r_0)} \cdot \cos \frac{ph_0}{h} \left(m + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x_n^A \sin \frac{pz_0}{h_0} \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{h_0^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} H_1^{(1)}(x_n^A r_0);$$

$$x_n^A = \sqrt{\left(\frac{w}{c_A}\right)^2 - \left(\frac{p(2n+1)}{2h_0}\right)^2}; \quad x_n^B = \sqrt{\left(\frac{w}{c_B}\right)^2 - \left(\frac{p(2n+1)}{2h}\right)^2}.$$

Анализ бесконечной системы (6) в случае постоянного профиля скорости звука показывает, что она не удовлетворяет требованиям регулярности, более того, эту систему не удастся отнести к какому-либо из изученных классов бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Для анализа асимптотического поведения решения бесконечной системы (6) в случае постоянного профиля скорости звука рассмотрим нормальные составляющие радиальной скорости на границе раздела областей (A) и (B) при $r = r_0$:

$$\frac{\partial F_A}{\partial r} = -\frac{i}{2h_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{p(n+1/2)z_0}{h_0}\right) x_n^A H_1^{(1)}(x_n^A r_0) \sin\left(\frac{p(n+1/2)z}{h_0}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} X_n x_n^A \sin\left(\frac{p(n+1/2)z}{h_0}\right),$$

$$\frac{\partial F_B}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} Y_n x_n^B \frac{H_1^{(1)}(x_n^B r_0)}{H_0^{(1)}(x_n^B r_0)} \sin\left(\frac{p(n+1/2)z}{h}\right). \quad (7)$$

Выражения (7) являются рядами Фурье, для сходимости которых необходимо выполнение следующих двух условий:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n x_n^A = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n x_n^B \frac{H_1^{(1)}(x_n^B r_0)}{H_0^{(1)}(x_n^B r_0)} = 0.$$

Откуда, учитывая асимптотические равенства [6]:

$$x_n^A = \frac{ipn}{h_0} + o\left(\frac{1}{n}\right); \quad x_n^B = \frac{ipn}{h} + o\left(\frac{1}{n}\right); \quad \frac{H_1^{(1)}(x_n^B r_0)}{H_0^{(1)}(x_n^B r_0)} = -i \frac{K_1(|x_n^B| r_0)}{K_0(|x_n^B| r_0)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

получаем $X_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $Y_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, что позволяет применить к численной оценке неизвестных в системе (6) метод редукции.

Численные расчеты показали, что в редуцированной системе (6) достаточно удержать первых 100 уравнений и неизвестных, чтобы удовлетворить условиям на $r = r_0$ с точностью до 5 значащих цифр. Наибольшая погрешность в выполнении данных условий возникает вблизи угловой точки (h_0, r_0) .

При $r \neq r_0$ ряды (3), дающие значения потенциала скоростей сходятся экспоненциально. Так, для F_A имеем следующую оценку общего члена ряда (для F_B оценка аналогична) [6]:

$$X_n \frac{J_0(x_n^A r)}{J_1(x_n^A r_0)} = -iX_n \frac{I_0(|x_n^A| r)}{I_1(|x_n^A| r_0)} = -iX_n \sqrt{\frac{r_0}{r}} e^{-\frac{pn}{h}(r_0-r)} (1 + O(1/n)), n \rightarrow \infty.$$

На рисунках 2-3 представлены результаты расчетов.

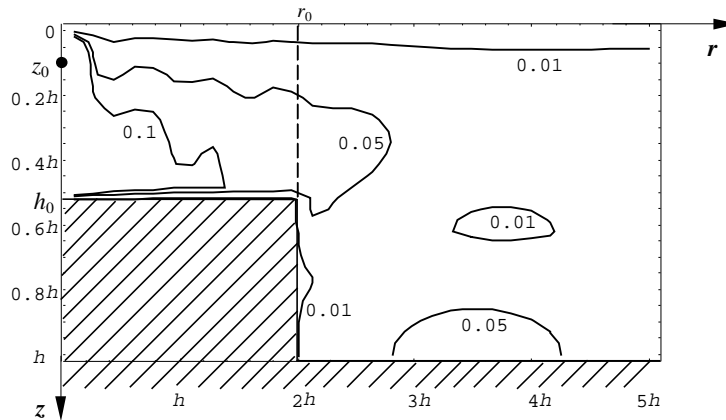


Рис. 2 - Изолинии модуля комплексной амплитуды потенциала скоростей $|F|$ для источника расположенного в точке $(0, 1h; 0)$, $h_0 = 0,5h$ ($\bar{w} = wh / c_A = 100$ - безразмерная частота).

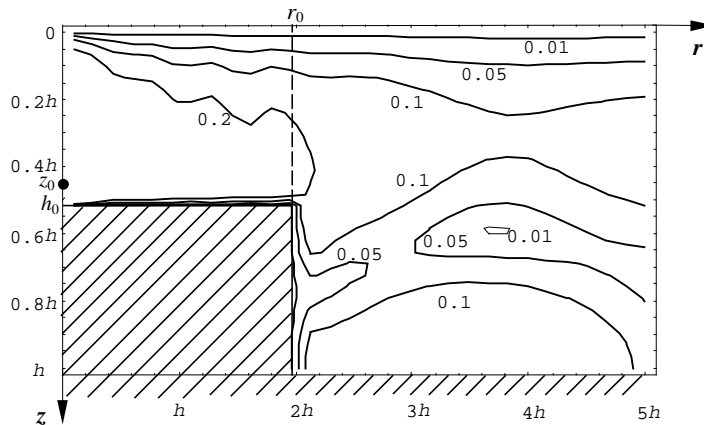


Рис. 3 - Изолинии модуля комплексной амплитуды потенциала скоростей $|F|$ для источника расположенного в точке $(0, 45h; 0)$, $h_0 = 0,5h$ ($\bar{w} = wh / c_A = 100$ - безразмерная частота).

Из рисунков видны две закономерности: во-первых, здесь, также как в волноводе с плоскопараллельными границами, максимальное давление дает источник расположенный ниже, во-вторых, под выступом имеется зона повышенного звукового давления.

Список использованной литературы

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. - М.: Наука, 1973. - 343 с.
2. Pekeris C.I. Theory of propagation of sound in a half-space of variable sound velocity under conditions of formation of a shadow zone // J.Acoust. Soc. Amer. - 1946. - V.18, №2. - P. 295-315.
3. Акустика океана / Под ред. Дж. Де Санто. - М.: Мир, 1982. - 320 с.
4. Chapman D.M.F., Ward P.D. The normal theory of air-to-water sound transmission in the ocean // J.Acoust. Soc.Amer. - 1990. - V.87. -№ 2. - P.601-618.

5. Папкива Ю.И., Ярошенко А.А. Распространение звуковых волн в неоднородном слое жидкости // Вестник КПИ. Машиностроение. - 2000. - Т.2, Вып.38. - С.120-123.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.

Поступила в редколлегию 02.08.2001 г.