Поскольку $\sin\frac{1}{2} > 0$, то знак выражения (11) совпадает со знаком $\sin(p-\frac{1}{2})$. В силу равномерной ограниченности $u(k,j)$ по $k \in \mathbf{Z}$

$$j^{2}(0)\left(1-mR|U(k)|\right) \le v_1(k,j) = j^{2}(0) + mU(k)j(0)j(-p) \le \left(1+mR|U(k)|\right)\|j\|^2$$

при $j \in K_R^{2p}$. Поэтому для любого заданного $R > 1$ при достаточно малом m функции $v_1(k,j,m)$ и $\Phi_1(k,j,m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 о равномерной асимптотической устойчивости при $\sin(p-\frac{1}{2}) < 0$ и условиям теоремы 2 о неустойчивости при $\sin(p-\frac{1}{2}) > 0$.

Список использованной литературы

1. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. – М.: Наука, 1977. – 228 с.
2. Hahn W. Stability of Motion. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 446 p.
3. Анашкин О. В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т.34, №7. – С. 867 – 876.
4. Anashkin O. Stability Theorems for Nonlinear Functional Differential Equations // Mathematical and Computer Modelling. – 1998. – Vol. 28, No. 2. – P. 25 – 35.
5. Anashkin O.V. Lyapunov's Direct Method and Parametric Resonance in Linear Systems with Delay // Fields Institute Communications. – 2001. – Vol. 29. – P. 11 – 18.
6. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

Поступила в редколлегию 10.10.2001 г.

УДК 517.917

С.К.ПЕРСИДСКИЙ, д.ф.-м.н., В.В.ЖУРАВЛЕВ, асп., Таврический нац. ун-т

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] для одного класса существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений рассмотрены теоремы об устойчивости и неустойчивости по нелинейному первому приближению, что позволило рассмотреть некоторые критические случаи для таких систем. В настоящей статье результаты работы [1] перенесены на системы конечно-разностных уравнений. При этом были использованы результаты работы [2].

Пусть $a_1,...,a_n$ - вещественные числа, каждое из которых может принимать одно из следующих двух значений: 1 и -1. Следуя [3], рассмотрим выпуклый конус $K(a_1,...,a_n)$: $x_s a_s \ge 0$ $(s=\overline{1,n})$ пространства R^n и при этом сами числа $a_1,...,a_n$ назовем параметрами конуса. Далее рассмотрим две следующие системы уравнений в конечных разностях:

$$x_s(m+1)=P_{s1}x_1(m)+...+P_{sn}x_n(m) \quad (\mathrm{s}=\overline{1,\mathrm{n}}) \tag{1}$$

$$x_s(m+1)=P_{s1}j_1(x_1(m))+...+P_{sn}j_n(x_n(m)) \quad (\mathrm{s}=\overline{1,\mathrm{n}}) \tag{2}$$

с вещественными и постоянными коэффициентами P_{sk}.

Будем предполагать, что функции $j_s(x_s)$ - непрерывны и сохраняют знаки своих аргументов. В дальнейшем всюду будем предполагать, что матрица коэффициентов P является невырожденной. Для дальнейшего изложения материала нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если коэффициенты систем (1), (2) и параметры некоторого конуса $K(a_1,...,a_n)$ связаны соотношениями*

$$P_{sk}a_s a_k \ge 0, \ (s,k=\overline{1,n}), \tag{3}$$

то любое решение системы (1) или системы (2), проходящее при $m=m_0$ через точку $M\in K(a_1,...,a_n)$, будет при всех $m\ge m_0$ оставаться в указанном конусе [2].

Лемма 2. *Пусть коэффициенты P_{sk} линейной системы (1) удовлетворяют условиям (3), тогда для того, чтобы все корни характеристического уравнения*

$$\Delta(m)=\det(P-mE)=0 \tag{4}$$

этой системы удовлетворяли условиям $|m_j|<1$ $(j=\overline{1,n})$, необходимо и достаточно существование положительных решений системы уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\ne s}}^{n} P_{ks}b_k a_k+(P_{ss}-1)b_s a_s=-a_s a_s \quad (s=\overline{1,n}) \tag{5}$$

при любых положительных числах a_s [2].

Лемма 3. *Пусть функции $j_s(x_s(m))$ нелинейной системы (2) удовлетворяют ранее наложенным условиям и неравенствам*

$$|j_s(x_s(m))|\ge|x_s(m)| \quad (s=\overline{1,n}). \tag{6}$$

Тогда при выполнении неравенств (3) в конусе $K(a_1,...,a_n)$ решения нелинейной системы (2) мажорируют соответствующие решения линейной системы (1).

Доказательство. Выберем точку $M(m_0,x_1^0,...,x_n^0)\in K(a_1,...,a_n)$.

Пусть $x_s = x_s(m)$ $(s=\overline{1,n})$ - решение линейной системы (1), $\bar{x}_s = \bar{x}_s(m)$ $(\mathrm{s}=\overline{1,\mathrm{n}})$ - решение нелинейной системы (2), проходящие через указанную точку. Пусть $m = m_0 + 1$, тогда

$$a_s(\bar{x}_s(m) - x_s(m)) = a_s(\bar{x}_s(m_0+1) - x_s(m_0+1)) =$$
$$= a_s(P_{s1}(j_1(\bar{x}_1(m_0)) - x_1(m_0)) + \ldots + P_{sn}(j_n(\bar{x}_n(m_0)) - x_n(m_0)) =$$
$$= P_{s1}a_1 a_s(j_1(\bar{x}_1(m_0))a_1 - x_1(m_0)a_1) + \ldots +$$
$$+ P_{sn}a_n a_s(j_n(\bar{x}_n(m_0))a_n - x_n(m_0)a_n) \geq 0$$

Т.е. $\bar{x}_s(m_0+1)a_s \geq x_s(m_0+1)a_s$ $(s=\overline{1,n})$.

Продолжая этот процесс, делаем заключение о справедливости леммы 3.

Далее рассмотрим нелинейную систему конечно-разностных уравнений вида

$$x_s(m+1) = P_{s1}j_1(x_1(m)) + \ldots + P_{sn}j_n(x_n(m)) + \tag{7}$$
$$+ R_s(j_1(x_1(m)),\ldots,j_n(x_n(m))) \ (s=\overline{1,n}),$$

коэффициенты которой связаны с параметрами некоторого выпуклого конуса $K(a_1,\ldots,a_n)$ соотношениями (3), функции $j_s(x_s)$ удовлетворяют ранее сделанным предположениям и
неравенствам (6), а величины R_s удовлетворяют условиям

$$\|R(j)\| = o(\|j\|) \text{ при } \|j\| \to 0, \text{ где } \|x\| = \sum_{s=1}^{n} |x_s|.$$

Теорема 1. *Пусть система (7) такова, что все корни "характеристического" уравнения* $\det(P - mE) = 0$ *по модулю меньше единицы, тогда при сделанных выше предположениях о правых частях системы (7) ее нулевое решение асимптотически устойчиво в некоторой достаточно малой окрестности начала координат.*

Доказательство. Выберем числа $a_s = 1$ и определим числа b_s из системы уравнений

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{n} P_{ks}b_k a_k + (P_{ss} - 1)b_s a_s = -a_s \ (s=\overline{1,n}). \tag{8}$$

Согласно лемме 2 эта система однозначно разрешима и все определяемые из нее числа $b_s > 0$.

Положим $V(x) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s(m)| = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s(m) sign\, x_s(m)$,

где $sign\, x_s(m) = 1$, если $x_s(m) \geq 0$, и $sign\, x_s(m) = -1$, если $x_s(m) < 0$.
Заметим, что систему (8) можно представить в виде

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\left|P_{ks}\right|b_k+(P_{ss}-1)b_s=-1\ \ (s=\overline{1,n}).$$

Нетрудно видеть, что в силу системы (7)

$$\Delta V_m\leq\sum_{s=1}^{n}(\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\left|P_{ks}\right|b_k+(P_{ss}-1)b_s)\left|j_s(x_s(m))\right|+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}b_s\left|R_s(j_1(x_1(m)),...,j_n(x_n(m)))\right|\leq-\left\|j(x(m))\right\|+b\left\|R(j)\right\|,$$

$$\text{где } b=\max_s\{b_s\}.$$

Ясно, что в достаточно малой окрестности начала координат $\Delta V_{m_{(7)}}$ является функцией отрицательно знакоопределенной, что и доказывает теорему.

Рассмотрим далее систему конечно-разностных уравнений с линейным первым приближением

$$x_s(m+1)=P_{s1}x_1(m)+...+P_{sn}x_n(m)+Q_s(x_1(m),...,x_n(m))\ \ (s=\overline{1,n}),\quad(9)$$

коэффициенты которой P_{sk} и параметры a_s некоторого конуса $K(a_1,...,a_n)$ связаны соотношениями (3), а функции Q_s удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_sQ_s(x_1,...,x_n)\geq0$ в точках конуса $K(a_1,...,a_n)$;

2) $\left\|R(x)\right\|=o(\left\|x\right\|)$ при $\left\|x\right\|\to0$.

Лемма 4. *Пусть правые части системы (9) удовлетворяют ранее сделанным предположениям, и характеристическое уравнение линейного первого приближения* $\Delta(m)=0$ *имеет хотя бы один корень* $m_j:\left|m_j\right|>1$. *Тогда нулевое решение системы (9) неустойчиво в конусе* $K(a_1,...,a_n)$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}P_{ks}b_k+(P_{ss}-1)b_s=1\ \ (s=\overline{1,n}).\qquad(10)$$

Нетрудно видеть [2], что в данном случае эта система однозначно разрешима, причем хотя бы одно из чисел $b_1,...,b_k$, найденных из (10), положительно.

Положим в конусе $K(a_1,...,a_n)$ $V=\sum_{s=1}^{n}b_sx_sa_s$. Ясно, что эта функция способна принимать в конусе K положительные значения и ее первая конечная разность в силу системы (9) приводится к виду в конусе $K(a_1,...,a_n)$:

$$\Delta V_m = \|x(m)\| + \sum_{s=1}^{n} b_s |Q_s(x_1,...,x_n)|.$$

Ясно, что решения системы (9) с начальными условиями $x_s(m_0) \in K(a_1,...,a_n)$ при возрастании m остаются в этом конусе, и в достаточно малой окрестности начала координат в конусе $K(a_1,...,a_n)$ $\Delta V_{m_{(9)}}$ является функцией положительной знакоопределенной. Таким образом, лемма доказана.

Приведенные выше результаты позволяют легко получить следующую теорему.

Пусть правые части системы с нелинейным первым приближением (7) удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 1.

Если при этом характеристическое уравнение $\Delta(m)=0$ имеет хотя бы один корень $m_j : |m_j| > 1$, то нулевое решение системы (7) неустойчиво в конусе $K(a_1,...,a_n)$.

Теорема 2. *Пусть система (7) такова, что ее коэффициенты* P_{sk} *и параметры некоторого конуса* $K(a_1,...,a_n)$ *связаны соотношениями (3), а функции* $j_s(x_s)$ *- непрерывны, сохраняют знаки своих аргументов и удовлетворяют неравенствам (6). Будем также предполагать, что* $\|R(j)\| = o(\|j\|)$ *при* $\|j\| \to 0$ *и в конусе* $K(a_1,...,a_n)$ *выполняются неравенства*

$$a_s R_s(j_1(x_1(m)),...,j_n(x_n(m))) \geq 0 \ \ (s=\overline{1,n}). \tag{11}$$

Если при этом характеристическое уравнение $\Delta(m)=\det(P-mE)=0$ *имеет хотя бы один корень по модулю больший единицы, то нулевое решение системы (7) неустойчиво.*

Для доказательства вместе с системой (7) рассмотрим систему (9) с теми же коэффициентами P_{sk}. Пусть у системы (7) $j_1(x_1(m)),...,j_n(x_n(m))$ - произвольные заданные функции, удовлетворяющие ранее сформулированным условиям. В этом случае выберем функции $Q_s(x_1(m),...,x_n(m))$ в системе (9) такими, что $\|Q(x)\| = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$ и

$$a_s Q_s(x_1(m),...,x_n(m)) \leq a_s R_s(j_1(x_1(m)),...,j_n(x_n(m))) \tag{12}$$
$$(s=\overline{1,n}).$$

При выполнении условия (12) к нелинейным системам (7) и (9) применимы утверждения, содержащиеся в лемме 3, т.е. решения нелинейной системы (7) будут при выполнении неравенств (12) в конусе $K(a_1,...,a_n)$ мажорировать соответствующие решения системы (9). Но в указанном конусе нулевое решение системы (9) будет неустойчивым на основании леммы 4, откуда в конусе $K(a_1,...,a_n)$ следует неустойчивость нулевого решения системы (7).

Рассмотрим далее пример для случая, когда правые части соответствующей системы удовлетворяют условиям теоремы 2, но характеристическое уравнение первого нелинейного приближения, не имея корней по модулю больше 1, имеет корень, равный 1.

В указанном выше критическом случае исследуем устойчивость следующей системы уравнений в конечных разностях:

$$\begin{cases} x_1(m+1) = j_1(x_1(m)) + 0{,}8j_2(x_2(m)) - 0{,}3j_3(x_3(m)) + 2j_1^3(x_1(m)) \\ x_2(m+1) = 0{,}4j_2(x_2(m)) - 0{,}2j_3(x_3(m)) + j_2^5(x_2(m)) \\ x_3(m+1) = -0{,}2j_2(x_2(m)) - 0{,}1j_3(x_3(m)) - 3j_3^3(x_3(m)) \end{cases}, \quad (13)$$

где $j_s(x_s)$ - любые непрерывные функции, сохраняющие знаки своих аргументов и $|j_s(x_s)| \geq |x_s|$ $(s=\overline{1,n})$.

Нетрудно видеть, что в конусе $K(1{,}1{,}-1)$ правые части системы (13) удовлетворяют условиям, наложенным на правые части соответствующей нелинейной системы (7) в теореме 2.

Положим $V(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Очевидно, что в конусе $K(1{,}1{,}-1)$ эта функция V способна принимать положительные значения, а ее первая конечная разность в указанном конусе удовлетворяет неравенству

$$\Delta V_m \geq 2j_1^3(x_1(m)) + j_2^5(x_2(m)) - 3j_3^3(x_3(m)),$$

то есть является функцией положительно знакоопределенной в этом конусе. Следовательно, нулевое решение системы (13) неустойчиво, т.к. в конусе $K(1{,}1{,}-1)$ выполняются все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Список использованной литературы

1. Персидский С.К. Применение квазиоднородных многочленов к некоторым задачам устойчивости. - Динам. системы. - 2000. - Вып.16. - С.15-21.
2. Персидский С.К. Абсолютная устойчивость одной нелинейной системы уравнений в конечных разностях. - Дифф. уравнения и их приложения. - Изд. Казахского гос.университета. - Алма-Ата. - 1979. - С.114-117.
3. Персидский С.К. К вопросу об абсолютной устойчивости. - Изв. АН СССР, Автоматика и телемеханика. - М. - 1969. - №12. - С.5-11.

Поступила в редколлегию 11.09.2001 г.