МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

УДК 532.59

И. Т. СЕЛЕЗОВ, доктор физ.-мат. наук, Ин-т гидромеханики НАНУ
О. В. АВРАМЕНКО, канд. физ.-мат. наук, Кировоградский гос. пед. ун-т

ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ ПРИ ОКОЛОКРИТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЛАХ

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта двух жидких полуограниченных сред в случае малых частот, что соответствует околокритическим волновым числам. Применен метод многомасштабных разложений до четвертого приближения. Получено условие разрешимости линейной задачи, соответствующей четвертому приближению, на основе которого получено эволюционное уравнение – нелинейное уравнение Шредингера третьего порядка, содержащее одну производную по пространственной координате и три производных по времени. Отмечено, что полученное эволюционное уравнение имеет смысл для всех волновых чисел.

Основные тенденции проблемы нелинейного распространения волновых пакетов на поверхности жидкости и вдоль поверхности раздела жидких сред отражены в фундаментальных работах [1-3]. В работе [4] представлено исследование эволюции волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности жидкого слоя. Задача о распространении волновых пакетов конечной амплитуды вдоль поверхности контакта двух полуограниченных жидких сред рассматривалась в статьях [5], [6], где методом многомасштабных разложений до третьего приближения было получено эволюционное уравнение, представляющее собой нелинейное уравнение Шредингера второго порядка. Аналогичная задача, для гидродинамической системы «слой - полупространство» была рассмотрена для случаев малых и больших частот в работах [7] и [8]. Для учета импульсов бóльших амплитуд необходимо рассматривать высшие приближения рассмотренных задач. В настоящей работе получено эволюционное уравнение в четвертом приближении задачи распространения волновых пакетов вдоль поверхности контакта двух жидких сред с учетом поверхностного натяжения в случае околокритических волновых чисел.

1. Постановка и метод решения нелинейной задачи Математическая постановка задачи о распространении волновых пакетов вдоль поверхности контакта $z=h(x,t)$ двух полуограниченных жидких сред

  ISSN 0203-3755. Динам. системы, 2001, Вып. 17

$$\Omega_1 = \{(x,y,z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,\ z < 0)\}$$
и $$\Omega_2 = \{(x,y,z), -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty,\ z > 0)\}$$

в декартовой системе координат (x,y,z) представляется в виде

$$\nabla^2 j_j = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega_j, \qquad (j = 1,2) \tag{1}$$

$$h_{,t} - j_{j,z} = -j_{j,x} h_{,x} \qquad \text{на } z = h(x,t), \quad (j = 1,2), \tag{2}$$

$$j_{1,t} - r j_{2,t} + (1-r)h + 0.5(\nabla j_1)^2 - 0.5(\nabla j_2)^2 -$$
$$-(1 + h_{,x}{}^2)^{-3/2} h_{,xx} = 0 \qquad \text{на} \qquad z = h(x,t), \tag{3}$$

$$|\nabla j_j| \to 0 \qquad \text{при} \quad z \to m\infty, \tag{4}$$

где j_j $(j = 1,2)$ - потенциалы скоростей в жидких средах, h - отклонение поверхности контакта жидких сред, $r = r_2 / r_1$.

Безразмерные переменные в задаче (1)-(4) введены на основе характерной длины $(T / r_1 g)^{1/2}$, характерного времени $(l / g)^{1/2}$, плотности нижней жидкой среды r_1, где T - поверхностное натяжение, g - ускорение свободного падения.

Для построения приближенных решений задачи (1)-(4) применяется метод многомасштабных разложений [9]

$$h(x,t) = \sum_{n=1}^{4} e^n h_n(x_0, x_1, x_2, x_3, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(e^5), \tag{5}$$

$$j_j(x,z,t) = \sum_{n=1}^{4} e^n j_{jn}(x_0, x_1, x_2, x_3, z, t_0, t_1, t_2, t_3) + O(e^5), \quad (j = 1,2) \tag{6}$$

где e - малый безразмерный параметр, $x_n = e^n x$, $t_n = e^n t$. Быстрый масштаб t_0 и короткий масштаб x_0 характеризуют частоту и длину волны, соответственно. Медленные масштабы t_1, t_2 и длинные масштабы x_1, x_2 характеризуют временные и пространственные изменения фазы и амплитуды волны.

Первые и вторые производные по пространственной координате x запишем в виде асимптотических рядов

в полуограниченных жидких средах Ω_j

$$j_{,x} = e j_{1,x_0} + e^2 (j_{1,x_1} + j_{2,x_0}) + e^3 (j_{1,x_2} + j_{2,x_1} + j_{3,x_0}) +$$
$$+ e^4 (j_{1,x_3} + j_{2,x2} + j_{3,x_1} + j_{4,x_0}) + O(e^5)$$
$$j_{,z} = e j_{1,z} + e^2 j_{2,z} + e^3 j_{3,z} + e^4 j_{4,z} + O(e^5), \tag{7}$$
$$j_{,xx} = e j_{1,x_0x_0} + e^2 (2j_{1,x_0x_1} + j_{2,x_0x_0}) + e^3 (2j_{1,x_0x_2} + 2j_{2,x_0x_1} + j_{3,x_0x_0} + j_{1,x_1x_1}) +$$
$$+ e^4 (2j_{1,x_1x_2} + 2j_{1,x_0x_3} + 2j_{2,x_0x_2} + 2j_{3,x_0x_1} + j_{4,x_0x_0} + j_{2,x_1x_1}) + O(e^5),$$
$$j_{,zz} = e j_{1,zz} + e^2 j_{2,zz} + e^3 j_{3,zz} + e^4 j_{4,zz} + O(e^5),$$

вдоль подвижной границы контакта двух сред $z=h(x,t)$

$$h_{,x}=eh_{1,x_0}+e^2(h_{1,x_1}+h_{2,x_0})+e^3(h_{1,x_2}+h_{2,x_1}+h_{3,x_0})+$$
$$+e^4(h_{1,x_3}+h_{2,x_2}+h_{3,x_1}+h_{4,x_0})+O(e^5)$$
$$h_{,xx}=eh_{1,x_0x_0}+e^2(2h_{1,x_0x_1}+h_{2,x_0x_0})+e^3(2h_{1,x_0x_2}+2h_{2,x_0x_1}+h_{1,x_1x_1}+h_{3,x_0x_0})+$$
$$+e^4(2h_{1,x_{10}x_3}+2h_{1,x_1x_2}+2h_{2,x_0x_2}+2h_{3,x_0x_1}+h_{2,x_1x_1}+h_{4,x_0x_0})+O(e^5)$$
$$j_{j,x}=ej_{j1,x_0}+e^2(j_{j1,x_1}+j_{j2,x_0}+h_1j_{j1,x_0z})+$$
$$+e^3(j_{j1,x_2}+j_{j2,x_1}+j_{j3,x_0}+h_1j_{j2,x_0z}+h_2j_{j1,x_0z}+h_1j_{j1,x_1z}+0.5h_1^2j_{j1,x_0zz})+$$
$$+e^4(j_{j1,x_3}+j_{j2,x_2}j_{j3,x_1}+j_{j4,x_0}+h_1j_{j3,x_0z}+h_1j_{j2,x_1z}+h_1j_{j1,x_2z}+$$
$$+h_2j_{j2,x_0z}+h_2j_{j1,x_1z}+h_3j_{j1,x_0z}+0.5h_1^2j_{j2,x_0zz}+0.5h_1^2j_{j1,x_1zz}+$$
$$+1/6\cdot h_1^2j_{j1,x_0zzz})+O(e^5) \qquad (8)$$
$$j_{j,z}=ej_{j1,z}+e^2(j_{j2,z}+h_1j_{j1,zz})+e^3(j_{j3,z}+h_1j_{j2,zz}+h_2j_{j1,zz}+0.5h_1^2j_{j1,zzz})+$$
$$+e^4(j_{j4,z}+h_1j_{j3,zz}+h_2j_{j2,zz}+h_3j_{j1,zz}+0.5h_1^2j_{j2,zzz}+1/6\cdot h_1^3j_{j1,zzzz})+O(e^5)$$

производные по временной координате t могут быть записаны аналогично производным по пространственной координате x.

В постановке задачи (1)-(4) имеются выражения, которые можно переписать в следующем виде

$$0.5(\nabla j_j)^2=0.5j_{j,x}^2+0.5j_{j,z}^2,$$
$$(1+h_{,x}^2)^{-3/2}=1-3/2\cdot h_{,x}^2+15/8\cdot h_{,x}^4+\mathbf{K}, \qquad (9)$$

Подстановка соотношений (5) - (9) в (1) -- (4) и последующее приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях e приводит к четырем линейным задачам относительно неизвестных величин h_i, j_{1i}, j_{2i}.

2. Вывод условия разрешимости четвертого приближения Приведем постановку задачи в четвертом приближении, полученную приравниванием коэффициентов при e^4

$$j_{j4,x_0x_0}+j_{j4,zz}=-2j_{j1,x_0x_3}-2j_{j2,x_0x_2}-2j_{j3,x_0x_1}-2j_{j1,x_1x_2}-j_{j2,x_1x_1} \qquad (10)$$
$$h_{4,t_0}-j_{j4,z}=-h_{1,t_3}-h_{2,t_2}-h_{3,t_1}+h_1j_{j3,zz}+h_2j_{j2,zz}+h_3j_{j1,zz}+$$
$$+0.5h_1^2j_{j2,zzz}+{}^1\!/\!_6h_1^3j_{j1,zzzz}-$$
$$-j_{j1,x_0}(h_{1,x_2}+h_{2,x_1}+h_{3,x_0})-h_{1,x_1}(j_{j2,x_0}+j_{j1,x_1}+h_1j_{j1,x_0z})- \qquad (11)$$
$$-h_{2,x_0}(j_{j2,x_0}+j_{j1,x_1}+h_1j_{j1,x_0z})-h_{1,x_0}(j_{j3,x_0}+j_{j2,x_1}+j_{j1,x_2}+$$
$$+h_1j_{j2,x_0z}+h_2j_{j1,x_0z}+h_1j_{j1,x_1z}+0.5h_1^2j_{j1,x_0zz})\ \text{на z=0}$$
$$j_{14,t_0}-rj_{24,t_0}+(1-r)h_4-h_{4,x_0x_0}=-j_{11,t_3}-j_{12,t_2}-j_{13,t_1}-$$

$$
\begin{aligned}
&-h_1 j_{13,t_0 z} - h_1 j_{12,t_1 z} - h_1 j_{11,t_2 z} - h_2 j_{12,t_0 z} - h_2 j_{11,t_1 z} - h_3 j_{11,t_0 z} - \\
&- 0.5h_1^2 j_{12,t_0 zz} - 0.5h_1^2 j_{11,t_1 zz} - \tfrac{1}{6} h_1^3 j_{11,t_0 zzz} + \qquad (12)\\
&+ r(j_{21,t_3} + j_{22,t_2} + j_{23,t_1} + h_1 j_{23,t_0 z} + h_1 j_{22,t_1 z} + \\
&+ h_1 j_{21,t_2 z} + h_2 j_{22,t_0 z} + h_2 j_{21,t_1 z} + h_3 j_{21,t_0 z} + \\
&+ 0.5h_1^2 j_{22,t0 zz} + 0.5h_1^2 j_{21,t_1 zz} + \tfrac{1}{6} h_1^3 j_{21,t_0 zzz}) - \\
&- 0.5 j_{12,x_0}^2 - 0.5 j_{11,x_1}^2 - 0.5 h_1^2 j_{11,x_0 z}^2 - \\
&- j_{12,x_0} j_{11,x_1} - j_{12,x_0} h_1 j_{11,x_0 z} - j_{11,x_1} h_1 j_{11,x_0 z} - \\
&- j_{11,x_0}(j_{13,x_0} + j_{12,x_1} + j_{11,x_2} + h_1 j_{12,x_0 z} + \\
&+ h_2 j_{11,x_0 z} + h_1 j_{11,x_1 z} + 0.5 h_1^2 j_{11,x_0 zz}) + \\
&+ r(0.5 j_{22,x_0}^2 + 0.5 j_{21,x_1}^2 + 0.5 h_1^2 j_{21,x_0 z}^2 + \\
&+ j_{22,x_0} j_{21,x_1} - j_{22,x_0} h_1 j_{21,x_0 z} + j_{21,x_1} h_1 j_{21,x_0 z} + \\
&+ j_{21,x_0}(j_{23,x_0} + j_{22,x_1} + j_{21,x_2} + h_1 j_{22,x_0 z} + \\
&+ h_2 j_{21,x_0 z} + h_1 j_{21,x_1 z} + 0.5 h_1^2 j_{21,x_0 zzz})) - \\
&- 0.5 j_{12,z}^2 - 0.5 h_1^2 j_{11,zz}^2 - j_{12,z} h_1 j_{11,zz} - j_{11,z} j_{13,z} - \\
&- j_{11,z} h_1 j_{12,zz} - j_{11,z} h_2 j_{11,zz} - 0.5 j_{11,z} h_1^2 j_{11,zzz} + \\
&+ r(0.5 j_{22,z}^2 + 0.5 h_1^2 j_{21,zz}^2 + j_{22,z} h_1 j_{21,zz} + j_{21,z} j_{23,z} + \\
&+ j_{21,z} h_1 j_{22,zz} + j_{21,z} h_2 j_{21,zz} + 0.5 j_{21,z} h_1^2 j_{21,zzz}) - \\
&- 3h_{1,x_0 x_0} h_{1,x_0} h_{1,x_1} - 3h_{1,x_0 x_0} h_{1,x_0} h_{2,x_0} - \tfrac{3}{2} h_{2,x_0 x_0} h_{1,x_0}^2 - 3h_{1,x_0 x_1} h_{1,x_0}^2 + \\
&+ 2h_{3,x_0 x_1} + 2h_{2,x_0 x_2} + 2h_{1,x_0 x_3} + 2h_{1,x_1 x_2} + 2h_{2,x_1 x_1} \quad \text{на} \quad z=0
\end{aligned}
$$

Первые три линейные задачи исследованы Найфэ в статье [6], где получено эволюционное уравнение в третьем приближении, а также исследовано на устойчивость решение этого уравнения, зависящее только от временной координаты. Здесь приведем некоторые результаты, полученные ранее:

дисперсионное соотношение

$$w^2 - (1+r)^{-1}(1 - r + k^2)k = 0; \qquad (13)$$

решения в первом приближении

$$
\begin{aligned}
h_1 &= A\exp iq + \bar{A}\exp(-iq),\\
j_{11} &= -iwk^{-1}A\exp(iq + kz) + iwk^{-1}\bar{A}\exp(-iq + kz), \qquad (14)\\
j_{21} &= iwk^{-1}A\exp(iq - kz) - iwk^{-1}\bar{A}\exp(-iq - kz);
\end{aligned}
$$

условие разрешимости линейной задачи второго приближения

$$-k' A_{,t_1} = A_{,x_1}; \qquad (15)$$

решения во втором приближении

$$h_2 = \Lambda A^2 \exp(2iq) + cc, \tag{16}$$

$$j_{12} = k^{-1}[A_{,t_1} + wk^{-1}(1 - zk)A_{,x_1}]\exp(iq + kz) -$$

$$- iwk^{-1}(\Lambda - k)A^2 \exp(2iq + 2kz) + cc,$$

$$j_{22} = -k^{-1}[A_{,t_1} + wk^{-1}(1 + zk)A_{,x_1}]\exp(iq - kz) +$$

$$+ iwk^{-1}(\Lambda + k)A^2 \exp(2iq - 2kz) + cc;$$

условие разрешимости линейной задачи третьего приближения

$$A_{,x_2} = -k' A_{,t_2} - 0.5ik'' A_{,t_1t_1} + 8iJ_0 A^2 \bar{A}, \tag{17}$$

где $q = kx_0 - w t_0$; k, w волновое число и частота центра волнового пакета;

$$k' = dk/dw; \qquad k'' = d^2k/dw^2;$$

$$\Lambda = w^2(1 - r)/(1 - r - 2k^2);$$

$$J_0 = -k[4(1 - r)w^2\Lambda + 4(1 + r)w^2 k - 3k^4]/[16(2k^2 + (1 + r)w^2 k^{-1}]; \tag{18}$$

A и $\bar{A}$- огибающая волнового пакета и ее комплексно сопряженная величина; cc- в каждой формуле обозначает величину, комплексно сопряженную всему выражению, стоящему перед ней. Условия разрешимости представлены в виде (15) и (17) для случая околокритических чисел $k \to k_c = (r - 1)^{1/2}$, что соответствует малым частотам $w \to 0$.

Нами были определены выражения для потенциалов и отклонения свободной поверхности в третьем приближении в виде

$$j_{13} = B_{01}^{(3)} z + (B_{10}^{(3)} + B_{11}^{(3)} z + B_{12}^{(3)} z^2)\exp(iq + kz) +$$

$$+ (B_{20}^{(3)} + B_{21}^{(3)} z)\exp(2iq + 2kz) + B_{30}^{(3)} \exp(3iq + 3kz) + cc,$$

$$j_{13} = C_{01}^{(3)} z + (C_{10}^{(3)} + C_{11}^{(3)} z + C_{12}^{(3)} z^2)\exp(iq + kz) +$$

$$+ (C_{20}^{(3)} + C_{21}^{(3)} z)\exp(2iq + 2kz) + C_{30}^{(3)} \exp(3iq + 3kz) + cc, \tag{19}$$

$$h_3 = D_1^{(3)} \exp(iq) + D_2^{(3)} \exp(2iq) + D_3^{(3)} \exp(3iq) + cc,$$

где коэффициенты имеют вид

$$B_{21}^{(3)} = -C_{21}^{(3)} = 2wk^{-1}(k - \Lambda)AA_{,x_1},$$

$$B_{12}^{(3)} = -C_{12}^{(3)} = 0.5iwk^{-1}A_{,x_1x_1},$$

$$B_{11}^{(3)} = C_{11}^{(3)} = k^{-1}[-wA_{,x_2} - iA_{,x_1t_1} - iwk^{-1}A_{,x_1x_1}],$$

$$B_{01}^{(3)} = -C_{01}^{(3)} = 2w\bar{A}A_{,x_1},$$

а остальные коэффициенты являются корнями соответствующих систем, имеющих следующий вид в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{10}^{(3)} \\ C_{10}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^{(3)} \\ F_{12}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2iw & -2k & 0 \\ -2iw & 0 & -2k \\ (1-r+4k^2) & -2iw & 2irw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_2^{(3)} \\ B_{20}^{(3)} \\ C_{20}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{21}^{(3)} \\ F_{22}^{(3)} \\ F_{23}^{(3)} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} -3iw & -3k & 0 \\ -3iw & 0 & -3k \\ (1-r+9k^2) & -3iw & 3irw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_3^{(3)} \\ B_{30}^{(3)} \\ C_{30}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{31}^{(3)} \\ F_{23}^{(3)} \\ F_{33}^{(3)} \end{pmatrix},$$

где

$$F_{11}^{(3)} = -A_{,t_2} - iwk(-0.5k + 3\Lambda)A^2\overline{A}\,,\; F_{12}^{(3)} = -A_{,t_2} - iwk(-0.5k - 3\Lambda)A^2\overline{A}\,,$$

$$F_{21}^{(3)} = 2(k-\Lambda)AA_{,t_1} - 2wAA_{,x_1}\,,\; F_{22}^{(3)} = -2(k+\Lambda)AA_{,t_1} - 2wAA_{,x_1}\,,$$

$$F_{31}^{(3)} = 4.5kwi(k-2\Lambda)A^3\,,\; F_{32}^{(3)} = 4.5kwi(k+2\Lambda)A^3\,,$$

$$F_{13}^{(3)} = (1+r)k^{-1}(iwA_{,t_2} - A_{,t_1t_1} - wk^{-1}A_{,x_1t_1}) + 2ikA_{,x_2} + A_{,x_1x_1} +$$

$$+[-2.5(1+r)kw^2 + w^2\Lambda(1-r) + 1.5k^4]A^2\overline{A}\;,$$

$$F_{23}^{(3)} = 2w\Lambda ik^{-1}(1+r)AA_{,t_1} + 8i\Lambda kAA_{,x_1}\,,$$

$$F_{33}^{(3)} = [-3.5(1+r)kw^2 + 5w^2\Lambda(1-r) - 1.5k^4]A^3.$$

После определения решений первых трех приближений (14), (16), (19) необходимо подставить их в линейную задачу четвертого приближения (10)-(12). Полученная после подстановки задача имеет решения вида

$$\begin{aligned} j_{14} &= B_{01}^{(4)}z + B_{02}^{(4)}z^2 + \\ &+ (B_{10}^{(4)} + B_{11}^{(4)}z + B_{12}^{(4)}z^2 + B_{13}^{(4)}z^3)\exp(iq + kz) + \\ &+ (B_{20}^{(4)} + B_{21}^{(4)}z + B_{22}^{(4)}z^2)\exp(2iq + 2kz) + \\ &+ (B_{30}^{(4)} + B_{31}^{(4)}z^2)\exp(3iq + 3kz) + B_{40}^{(4)}\exp(4iq + 4kz) + cc \\ j_{24} &= C_{01}^{(4)}z + C_{02}^{(4)}z^2 + \\ &+ (C_{10}^{(4)} + C_{11}^{(4)}z + C_{12}^{(4)}z^2 + C_{13}^{(4)}z^3)\exp(iq + kz) + \\ &+ (C_{20}^{(4)} + C_{21}^{(4)}z + C_{22}^{(4)}z^2)\exp(2iq + 2kz) + \\ &+ (C_{30}^{(4)} + C_{31}^{(4)}z^2)\exp(3iq + 3kz) + C_{40}^{(4)}\exp(4iq + 4kz) + cc \end{aligned} \tag{21}$$

$$h_3 = D_1^{(4)}\exp(iq) + D_2^{(4)}\exp(2iq) + D_3^{(4)}\exp(3iq) + D_4^{(4)}\exp(4iq) + cc$$

где коэффициенты определяются из уравнений (10) приравниванием коэффициентов при одинаковых независимых функциях

$$B_{13}^{(4)} = \tfrac{1}{6}wk^{-1}A_{,x_1x_1x_1}\,,\; C_{13}^{(4)} = B_{13}^{(4)}\,,\; C_{12}^{(4)} = -B_{12}^{(4)}$$

$$B_{13}^{(4)} = 0.25k^{-1}(-2wk^{-1}A_{,x_1x_1x_1} - 2A_{,x_1x_1x_1} + 4iwA_{,x_2x_1}),$$

$$B_{11}^{(4)} = wk^{-3}A_{,x_1x_1x_1} + (6\Lambda - k)wA\bar{A}A_{,x_1} +$$
$$+ k^{-2}A_{,x_1x_1t_1} - 2iwk^{-2}A_{,x_2x_1} - ik^{-1}A_{,x_2t_1} - ik^{-1}A_{,x_1t_2} - wk^{-1}A_{,x_3} +$$
$$+ (-0.5k + 3\Lambda)wA^2\bar{A}_{,x_1},$$

$$C_{11}^{(4)} = wk^{-3}A_{,x_1x_1x_1} - (6\Lambda + k)wA\bar{A}A_{,x_1} +$$
$$+ k^{-2}A_{,x_1x_1t_1} - 2iwk^{-2}A_{,x_2x_1} - ik^{-1}A_{,x_2t_1} - ik^{-1}A_{,x_1t_2} - wk^{-1}A_{,x_3} -$$
$$- (0.5k + 3\Lambda)wA^2\bar{A}_{,x_1},$$

а коэффициенты при $\exp(iq + kz)$ в потенциалах j_{14}, j_{24} и при $\exp(iq)$ в отклонении свободной поверхности h_4 связаны системой линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -iw & -k & 0 \\ -iw & 0 & -k \\ (1 - r + k^2) & -iw & irw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^{(4)} \\ B_{10}^{(4)} \\ C_{10}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^{(4)} \\ F_{12}^{(4)} \\ F_{13}^{(4)} \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

где элементы столбца свободных членов записываются в форме

$$F_{11}^{(4)} = wk^{-3}A_{,x_1x_1x_1} + k^{-2}A_{,x_1x_1t_1} - 2iwk^{-2}A_{,x_2x_1} - ik^{-1}A_{,x_2t_1} -$$
$$- ik^{-1}A_{,x_1t_2} - wk^{-1}A_{,x_3} - A_{,t_3} +$$
$$+ 0.5wkA^2\bar{A}_{,x_1} - k(0.5k + \Lambda)A^2\bar{A}_{,t_1} +$$
$$+ w[k - 2(w^2(1 + r) + k(1 - r) + 16k^3 + 1)\Lambda L^{-1}]A\bar{A}A_{,x_1}$$
$$+ k\{\ k - 2k[-5w^2(1 + r) + k(1 - r) + 4k^3 + 6w^2]L^{-1} -$$
$$- 2[4w^2(1 + r) + k(1 - r) + 4k^3]\Lambda L^{-1}\ \}A\bar{A}A_{,t_1},$$

$$F_{12}^{(4)} = wk^{-3}A_{,x_1x_1x_1} + k^{-2}A_{,x_1x_1t_1} - 2iwk^{-2}A_{,x_2x_1} - ik^{-1}A_{,x_2t_1} -$$
$$- ik^{-1}A_{,x_1t_2} - wk^{-1}A_{,x_3} - A_{,t_3} +$$
$$+ 0.5wkA^2\bar{A}_{,x_1} - k(0.5k - \Lambda)A^2\bar{A}_{,t_1} +$$
$$+ w[k + 2(w^2(1 + r) + k(1 - r) + 16k^3 + 1)\Lambda L^{-1}]A\bar{A}A_{,x_1} +$$
$$+ k\{\ k + 2k[-5w^2(1 + r) + k(1 - r) + 4k^3 + 6w^2]L^{-1} +$$
$$+ 2[4w^2(1 + r) + k(1 - r) + 4k^3]\Lambda L^{-1}\ \}A\bar{A}A_{,t_1},$$

$$F_{13}^{(4)} = -ik^{-2}(1 + r)A_{,t_1t_1x_1} - iwk^{-3}(1 + r)A_{,x_1x_1t_1} + 2A_{,x_2x_1} -$$
$$- wk^{-2}(1 + r)A_{,x_2t_1} - wk^{-2}(1 + r)A_{,x_1t_2} - 2k^{-1}(1 + r)A_{,t_2t_1} +$$
$$2iA_{,x_3} + iwk^{-1}(1 + r)A_{,t_3} +$$
$$+ 0.5iw^2(1 + r)A^2\bar{A}_{,x_1} - iw\left[0.5k(1 + r) + \Lambda(1 - r)\right]A^2\bar{A}_{,t_1} +$$

$$+\{\,3i[w^2(1+r)-2k^3]-2iw(1-r)[kk^2+w^2k^{-1}(1+r)]\Lambda L^{-1}\,\}A\bar{A}A_{,x_1}+$$
$$+\{\,-0.5ikw(1+r)+2iw^3k(1-r)^2L^{-1}-$$
$$-2iw(1-r)[1+2w^2(1+r)L^{-1}]\Lambda\,\}A\bar{A}A_{,t_1},$$
$$\text{где } L=2w^2(1+r)-k(1-r)-4k^3.$$

Система (22) имеет определитель равный нулю, следовательно, ее условием разрешимости является следующее выражение

$$-2iwk^{-1}(1+r)A_{,t_3}-i(2k+w^2k^{-2}(1+r))A_{,x_3}+2k^{-1}(1+r)A_{,t_2t_1}+$$
$$+2wk^{-2}(1+r)A_{,t_2x_1}+2wk^{-2}(1+r)A_{,t_1x_2}-$$
$$-2k^{-1}(-k+w^2k^{-2}(1+r))A_{,x_2x_1}+$$
$$+ik^{-2}(1+r)A_{,t_1t_1x_1}+2iwk^{-3}(1+r)A_{,t_1x_1x_1}+iw^2k^{-4}(1+r)A_{,x_1x_1x_1}= \tag{23}$$
$$=\{[-16i(1-r)k^3-4i(1-r)^2k]\Lambda-$$
$$-16i(1+r)k^4-4i(1-r^2)k^2+8i(1+r^2)kw^2+$$
$$+4i(1+r)^2kw^2\}wL^{-1}A\bar{A}A_{,t_1}+$$
$$+\{[-16i(1-r)k^2-4i(1-r^2)k^{-1}w^2]w^2\Lambda+$$
$$+[20i(1+r)k^3+2i(1-r^2)k]w^2-4i(1+r)^2w^4-$$
$$-6i(1-r)k^4-24ik^6\}L^{-1}A\bar{A}A_{,x_1},$$

Таким образом получена связь между частными производными первого порядка $A_{,t_3}$, $A_{,x_3}$, второго порядка $A_{,t_2t_1}$, $A_{,t_2x_1}$, $A_{,t_1x_2}$, $A_{,x_2x_1}$ и третьего порядка $A_{,t_1t_1x_1}$, $A_{,t_1x_1x_1}$, $A_{,x_1x_1x_1}$, которая дает возможность получить третье приближение эволюционного уравнения.

3. Эволюционное уравнение при малых частотах Дифференцирование дисперсионного соотношения (13) по частоте w дает следующие выражения для первой, второй и третьей производных волнового числа

$$k'=-1/F'_{,k}, \quad k''=-F''_{,kk}/(F'_{,k})^3, \tag{24}$$
$$k'''=[-3(F''_{,kk})^2+F'''_{,kkk}F'_{,k}]/(F'_{,k})^5,$$
$$\text{где } F(w,k)=w-(k(1-r+k^2)/(1+r))^{1/2}.$$

После дифференцирования по считающимся независимыми переменным условий разрешимости второго и третьего приближений (15) и (17) имеем выражения для частных производных

$$A_{,t_1x_1x_1}=k'^2A_{,t_1t_1t_1},\ A_{,t_1t_1x_1}=-k'A_{,t_1t_1t_1},\ A_{,t_2x_1}=-k'A_{,t_2t_1},$$
$$A_{,x_1x_2}=k'^2A_{,t_1t_2}+0.5ik'k''A_{,t_1t_1t_1}-8ik'J_0(A^2\bar{A})_{,t_1}, \qquad 25)$$

$$A_{,t_1 x_2} = -k' A_{,t_1 t_2} - 0.5ik'' A_{,t_1 t_1 t_1} + 8i\vartheta_0 (A^2 \overline{A})_{,t_1}.$$

Подставим соотношения (25) в условие разрешимости четвертого приближения (23) с учетом значений производных (24) и после громоздких преобразований, произведенных в системе символьных вычислений Maple V.4, получаем уравнение вида

$$A_{,x_3} + k' A_{,t_3} + ik'' A_{,t_1 t_2} - \frac{1}{6} \cdot k''' A_{,t_1 t_1 t_1} = \tag{26}$$

$$= 8w\vartheta A\overline{A}A_{,t_1} + 16\vartheta_0 [k' w(1+r) + k^2 - w^2/k \cdot (1+r)] \cdot [2k^2 +$$

$$+ w^2/k \cdot (1+r)]^{-1} \cdot (A^2 \overline{A})_{,t_1},$$

где

$$\vartheta = 0.5kL^{-1}(1-r+3k^2)^{-2} \times$$

$$\times \{[k(1-r+4k^2)(1-r+4k^2) - 2(1+r)w^2(4k^2 + (1-r)k^{-1}w^2)](1-r)\Lambda +$$

$$+ k[4(1+r)k^3 + (1-r^2)k - 2(1+r^2)w^2 - (1+r)^2 w^2](1-r+3k^2) +$$

$$+ (1+r)((10(1+r)k^2 + (1+r^2))kw^2 - 2(1+r)^2 w^4 - 3k^4(1-r+4k^2))]\}$$

Условия разрешимости в случае околокритических волновых чисел (15), (17) и (26) составляют систему дифференциальных уравнений, связывающих частные производные огибающей волнового пакета. Домножим уравнения этой системы на e, e^2, e^3 соответственно, и просуммируем полученные соотношения

$$eA_{,x_1} + e^2 A_{,x_2} + e^3 A_{,x_3} + ek' A_{,t_1} + e^2 k' A_{,t_2} + e^3 k' A_{,t_3} +$$

$$+ e^2 0.5ik'' A_{,t_1 t_1} + e^3 ik'' A_{,t_1 t_2} - e^3 \frac{1}{6} \cdot k''' A_{,t_1 t_1 t_1} = e^2 8i\vartheta_0 A^2 \overline{A} + \tag{27}$$

$$+ e^3 8w\vartheta A\overline{A}A_{,t_1} + e^3 16\vartheta_0 [k' w(1+r) + k^2 -$$

$$- w^2/k \cdot (1+r)] \cdot k^{-1}[1-r+3k^2]^{-1} \cdot (A^2 \overline{A})_{,t_1},$$

Как известно, производные огибающей волнового пакета по пространственной и временной координатам до четвертого порядка малого параметра e могут быть записаны в виде

$$A_{,x} = \sum_{n=1}^{3} e^n A_{,x_n} + O(e^4), \; A_{,t} = \sum_{n=1}^{3} e^n A_{,t_n} + O(e^4), \tag{28}$$

$$A_{,tt} = e^2 A_{,t_1 t_1} + e^3 2A_{,t_1 t_2} + O(e^4), \; A_{,ttt} = 2e^3 A_{,t_1 t_1 t_1} + O(e^4).$$

Учитывая соотношения (28), перепишем уравнение (27) в виде

$$A_{,x} + A_{,t} + \frac{1}{2!} ik'' A_{,tt} - \frac{1}{3!} \cdot k''' A_{,ttt} = e^2 8i\vartheta_0 A^2 \overline{A} +$$

$$+ e^2 8w\vartheta A\overline{A}A_{,t} + e^2 16\vartheta_0 [k' w(1+r) + k^2 - \tag{29}$$

$$- w^2/k \cdot (1+r)] \cdot k^{-1}[1-r+3k^2]^{-1} \cdot (A^2 \overline{A})_{,t}.$$

Полученное уравнение третьего порядка является эволюционным уравнением задачи о распространении волновых пакетов на поверхности контакта двух жидких полуограниченных сред. Уравнение (29) представляет собой новое нелинейное уравнение Шредингера, содержащее одну производную по пространственной координате и три производных по времени. Несмотря на то, что уравнение получено для случая околокритических волновых чисел, очевидно, что оно справедливо для всех волновых чисел, больших или равных критическому.

Заключение В статье рассмотрена слабонелинейная задача о распространении волновых пакетов на поверхности раздела двух жидких полуограниченных сред. Применен метод многомасштабных разложений до четвертого приближения. Получено условие разрешимости третьего приближения, представляющего собой связь между частными производными по масштабным временным и пространственным переменным до третьих включительно. Рассмотрен случай околокритических волновых чисел. С учетом условий разрешимости второго, третьего и четвертого приближения и дисперсионного соотношения получено эволюционное уравнение, являющееся уравнением Шредингера третьего порядка, содержащее одну производную по пространственной координате и три по времени. Полученное уравнение описывает эволюцию волнового пакета для всех волновых чисел, как равных критическому волновому числу, так и больших, чем критическое.

Работа выполнена при поддержке INTAS 99-1637

Список использованной литературы

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, 1977.
2. Овсянников В.Л., Макаренко Н.И., Налимов В.И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.- Новосибирск: Наука, 1985.
3. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.- Киев: наук. думка, 1989.
4. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // J. of the Phisical Soc. of Japan.- 1972.- 33.- P. 805-811.
5. Kiang R.L. Nonlinear theory of inviscid Taylor instability near the cutoff wave number // Physics of fluids.- 1969.- Vol.12.-P. 1333-1339.
6. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface //Trans. of the ASME J. of Appl. Mech. Ser. E.- 1976.- 43, N4.- P. 584-588.
7. Avramenko O.V., Selezov I.T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доп. НАНУ.- 1997.- N 10.- С. 61-66.
8. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика.- 2000.- Вып.31.- С.151-157.
9. Найфэ А. Методы возмущений.- М.: Мир, 1976.

Поступила в редколлегию 12.97.2001 г.