и прикладная механика: Научно-техн. сб. - Харьков: Основа, 2000. - Вып. 31. - С. 103-108.
8. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учебное пособие. - Донецк: ДонГУ, 1980. - 128 с.

Поступила в редколлегию 05.08.2001 г.

УДК 532.59

И.Т.СЕЛЕЗОВ, д-р физ.-мат. наук, С.Г.ШПАКОВА, канд. физ.-мат. наук
Ин-т гидромех. НАН Украины

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В СИСТЕМЕ СТРУЯ – СТРАТИФИЦИРОВАННАЯ ЖИДКОСТЬ

Получено аналитическое решение задачи о распространении волн в стратифицированной жидкости, генерируемых инжекцией вертикальной струи. Проведен анализ существования бегущих волн, анализ фазовых и групповых скоростей в зависимости от длины волны, а также волновых мод. Установлены характерные особенности распространения волн и переноса волновой энергии.

1. **Введение**. Проблема генерации и распространения внутренних волн имеет большое теоретическое и прикладное значение. Теория струй в свою очередь была и остается также проблемой исключительной важности и актуальности. Подавляющее число работ в этой области относится к струйным движениям в однородных и нестратифицированных средах [1]. В работе [1] получено решение новой задачи инжекции струи в стратифицированную среду в случае осесимметричного движения. Здесь рассматривается соответствующая неосесимметричная задача.

Движение стратифицированной среды с достаточной точностью обычно описывается линеаризованными уравнениями гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости в приближении Буссинеска [2]

$$\frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{00}}\vec{\nabla}_\perp p=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho_{00}}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{g}{\rho_{00}}\rho=0, \qquad \vec{\nabla}_\perp\cdot\vec{v}_\perp=-\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\rho_{00}}\right)=\frac{1}{g}N^2(z)\,w, \qquad N^2(z)=-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0(z)}{dz}, \qquad \vec{v}_\perp=\left(v_r,v_\theta\right) \qquad (1)$$

При этом полагаем $\rho_0(z)\cong\rho_{00}=const$ в (1) всюду, кроме $N^2(z)$. Система уравнений (1) может быть сведена к разрешающему уравнению для вертикальной скорости w и уравнению, связывающему давление p и w

$$\frac{\P^2}{\P t^2}\nabla^2 w + N^2(z)\nabla_-^2 w = 0,\ \nabla_-^2 p = r_{00}\frac{\P^2 w}{\P t\P z} \qquad (2)$$

В уравнениях (1), (2) выделена вертикальная координата z, а черточка снизу справа соответствует плановым координатам.

2. **Постановка задачи**. Задача решается в линеаризованной постановке. Струя, с которой связана цилиндрическая система координат r,θ,z с осью oz, направленной вниз, занимает область $\Omega^j = \{r,q,z | r\in[0,D/2],\ q\in(0,2p),\ z\in(-\infty,\infty)\}$, а внешняя среда – область Ω, соответственно.

Жидкость в струе рассматривается невязкой несжимаемой, невозмущенная скорость U_0 равномерно распределенной по поперечному сечению струи. Это позволяет ввести полный потенциал Φ по формуле $\vec{v}^{\,j} = \vec{\nabla}\Phi^j$ и в силу линейности задачи представить полное поле в виде суперпозиции невозмущенной и возмущенной составляющих $\Phi^j(r,z,q,t) = U_0 z + j^j(r,z,q,t)$,

$$\frac{\P\Phi^j}{\P z} = U_0 + v_z^j,\qquad \frac{\P\Phi^j}{\P r} = \frac{\P j^j}{\P r} = v_r^j,\qquad \frac{\P\Phi^j}{\P q} = \frac{\P j^j}{\P q} = v_q^j. \qquad (3)$$

При этом возмущенное движение описывается потенциалом φ^j, удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Постановка задачи в системе координат (r,q,z) с учетом уравнений (1) - (3) включает уравнения

в области Ω

$$\frac{\P v_r}{\P t} + \frac{\P p}{\P r} = 0,\quad \frac{\P v_q}{\P t} + \frac{1}{r}\frac{\P p}{\P q} = 0,\quad \frac{\P w}{\P t} + \frac{\P p}{\P z} + r = 0,\quad \frac{\P r}{\P t} = N^2 w,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}(r v_r) = -\frac{\P w}{\P z},\qquad \frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}\left(r\frac{\P p}{\P r}\right) = \frac{\P^2 w}{\P t\P z},$$

$$\frac{\P^2}{\P t^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}\left(r\frac{\P w}{\P r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\P^2 w}{\P q^2} + \frac{\P^2 w}{\P z^2}\right] + N^2\left[\frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}\left(r\frac{\P w}{\P r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\P^2 w}{\P q^2}\right] = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}\left(r\frac{\P p}{\P r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\P^2 w}{\P q^2} = r_{00}\frac{\P^2 w}{\P t\P z}, \qquad (4)$$

в области Ω^j

$$\frac{1}{r}\frac{\P}{\P r}\left(r\frac{\P j^j}{\P r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\P^2 j^j}{\P q^2} + \frac{\P^2 j^j}{\P z^2} = 0, \qquad (5)$$

условия сопряжения на границе раздела жидкостей

$$\left(\frac{\P^2 j^j}{\P t\P r} - U_0\frac{\P v_r}{\P z} - \frac{\P v_r}{\P t}\right)_{r=\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\rho_0^j \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \varphi^j}{\partial z}\right)_{r=\frac{1}{2}} = -p\Big|_{r=\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

условия регулярности на оси и на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0, \quad v_r, v_\theta, w, p < \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty, \qquad (7)$$

представление решений в классе бегущих волн вдоль оси z

$$\{\varphi_m^j, w_m, \ldots\} = \{\hat\varphi_m^j(r), \hat w_m(r), \ldots\} \exp[i(k_m z - \omega_m t)] \cos(m\theta),$$
$$v_{\theta m} = \hat v_{\theta m}(r) \exp[i(k_m z - \omega_m t)] \sin(m\theta). \qquad (8)$$

В (1) - (8) приняты обозначения: ρ и p - плотность и давление, ρ_{00} - невозмущенная плотность стратифицированной среды, w, v_r, v_θ - компоненты скорости движения стратифицированной жидкости вдоль осей z, r, θ, N - частота плавучести Брента - Вяйсяля, ρ_0^j - плотность жидкости в струе, D - диаметр струи, k_m и ω_m $(m = 0,1,2,\ldots)$ - волновое число и круговая частота.

В (4) - (8) приняты безразмерные величины, введенные по формулам (звездочки опускаются)

$$(r^*, \theta^*, z^*) = \frac{1}{D}(r, \theta, z), \qquad t^* = \sqrt{\frac{g}{D}}, \quad p^* = \frac{1}{\rho_{00} g D} p, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{00}},$$

$$\rho_0^{*j} = \frac{\rho_0^j}{\rho_{00}}, \quad \omega_m^* = \sqrt{\frac{D}{g}}\omega_m, \qquad \varphi^* = \frac{1}{D\sqrt{gD}}\varphi, \quad N^{*2}(z^*) = \frac{D}{g} N^2(z),$$

$$(v_r^*, v_\theta, w^*, U_0^*) = \frac{1}{\sqrt{gD}}(v_r, v_\theta, w, U_0), \quad k_m^* = D k_m,$$

Приближенный модельный анализ проводится в предположении, что на некотором участке в вертикальном направлении величину $N(z)$ можно принять постоянной в связи с тем, что при линейном изменении $\rho_0(z)$ ее производная есть константа, а сама величина $\rho_0(z)$ есть медленно меняющаяся функция z.

3. **Решения и анализ результатов**. После подстановки (8) в (4) - (7) получаем

$$\frac{d^2 \hat w_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\hat w_m}{dr} + \left(k_{1m}^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\hat w_m = 0, \qquad k_{1m} = \frac{k_m}{\sqrt{N^2/\omega_m^2 - 1}} \qquad (9)$$

$$\frac{d^2 \hat\varphi_m^j}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\hat\varphi_m^j}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + k_m^2\right)\hat\varphi_m^j = 0. \qquad (10)$$

$$[\frac{d\breve{\varphi}_m^j}{dr}+\frac{k_m}{\omega_m}(U_0-\frac{\omega_m}{k_m})\breve{v}_{rm}]_{r=1/2}=0,$$

$$[ik\rho_0^j(U_0-\frac{\omega_m}{k_m})\breve{\varphi}_m^j+\breve{p}_m]_{r=1/2}=0. \qquad (11)$$

Решение уравнения (9) можно записать как в функциях Бесселя (описывает стоячие поперечные волны), так и в функциях Ханкеля (описывает бегущие волны) [3].

С учетом условий регулярности (7) решения в функциях Ханкеля в области Ω и решение для струи в области Ω^j записываются в виде

$$\breve{w}_m(r)=C_{3,m}H_m^{(1)}(k_{1m}\,r). \qquad (12)$$

$$\hat{\rho}_m(r)=i\frac{N^2}{\omega_m}C_{3,m}H_m^{(1)}(k_{1m}r), \qquad \hat{v}_{rm}(r)=-i\frac{k_m}{k_{1m}}C_{3,m}H_{m+1}^{(1)}(k_{1m}r),$$

$$\hat{v}_{\theta m}(r)=-i\frac{m}{r}\frac{k_m}{k_{1m}^2}C_{3,m}H_{m+1}^{(1)}(k_{1m}r), \qquad \hat{p}_m(r)=-\frac{\omega_m k_m}{k_{1m}^2}C_{3,m}H_m^{(1)}, \qquad (13)$$

$$\breve{\varphi}_m^j(r)=C_{1,m}I_m(k_m r). \qquad (14)$$

Подставляя решения (13), (14) в условия сопряжения (11), получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{I_{m+1}(k_m/2)}{I_m(k_m/2)}+\frac{\rho_0{}^j(U_0/c_m-1)^2}{\sqrt{N^2/\omega_m^2-1}}\frac{H_{m+1}^{(1)}(k_{1m}/2)}{H_m^{(1)}(k_{1m}/2)}=0. \qquad (15)$$

Исследуем это уравнение. При любых $k_m>0,$ первый член в (16) положителен. Коэффициент при отношении функций Ханкеля также положителен в силу того, что $\omega_m<N$ [4]. Поэтому уравнение (15) можно представить в виде

$$1+A_mH_{m+1}^{(1)}(k_{1m}/2)/H_m^{(1)}(k_{1m}/2)=0, \qquad (16)$$

где величина $A_m>0$ всегда. Выражая функции Ханкеля через функции Бесселя $H_{n_m}^{(1)}=J_{n_m}(\gamma)+iY_{n_m}(\gamma)=0,\ (n=0,\ 1)$, приводим уравнение (16) к системе двух уравнений

$$J_m(k_{1m}/2)[1+A_mJ_{m+1}(k_{1m}/2)/J_m(k_{1m}/2)]=0, \qquad (17)$$

$$Y_m(k_{1m}/2)[1+A_mY_{m+1}(k_{1m}/2)/Y_m(k_{1m}/2)]=0, \qquad (18)$$

Имеем четыре случая разрешимости этой системы:

1) $J_m(k_{1m}/2)=0;\quad Y_m(k_{1m}/2)=0.$ Известно, что положительные корни двух линейно независимых действительных функций Бесселя одного порядка перемежаются [5]. Следовательно, не существует

такого $k_{1m} > 0$, при котором одновременно $J_m(k_{1m}/2) = 0$ и $Y_m(k_{1m}/2) = 0$.

2) $1 + A_m J_{m+1}(k_{1m}/2)/J_m(k_{1m}/2) = 0$; $1 + A_m Y_{m+1}(k_{1m}/2)/Y_m(k_{1m}/2) = 0$. Рассмотрим Вронскиан [5]

$$J_{m+1}(g)Y_m(g) - J_m(g)Y_{m+1}(g) = 2/p/g, \tag{19}$$

который преобразуем к виду

$$J_m(g)Y_m(g)[J_{m+1}(g)/J_m(g) - Y_{m+1}(g)/Y_m(g)] = 2/p/g. \tag{20}$$

Вронскиан отличен от нуля, поэтому

$$J_{m+1}(k_{1m}/2)/J_m(k_{1m}/2) \neq Y_{m+1}(k_{1m}/2)/Y_m(k_{1m}/2).$$

Следовательно, не существует таких действительных $k_{1m} > 0$, при которых оба выражения одновременно равны нулю.

3) $J_m(k_{1m}/2) = 0$; $1 + A_m Y_{m+1}(k_{1m}/2)/Y_m(k_{1m}/2) = 0$. Из графиков и таблиц видно, что корни рассматриваемых функций Бесселя располагаются следующим образом [6]: если $k_{1m}/2$ - корень функции $J_m(g)$, то значения функций $Y_{m+1}(g), Y_m(g)$ в этой точке либо одного знака, либо $k_{1m}/2$ также является корнем функции $Y_{m+1}(g)$, а поэтому второе выражение будет отлично от нуля. Следовательно, и для этого случая система не имеет решения.

4) $Y_m(k_{1m}/2) = 0$; $1 + A_m J_{m+1}(k_{1m}/2)/J_m(k_{1m}/2) = 0$. В этом случае наблюдается картина, аналогичная рассмотренной в предыдущем варианте. Если $k_{1m}/2$ является корнем функции $Y_m(g)$, то значения функций $J_{m+1}(g), J_m(g)$ в этой точке либо одного знака, либо $k_{1m}/2$ также является корнем функции $J_{m+1}(g)$, и второе выражение также не равно нулю.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что система уравнений (17), (18) неразрешима, т.е. дисперсионное уравнение (15) не имеет решения в области действительных $k_{1m} > 0$ и, следовательно, волны в радиальном направлении не распространяются.

Запишем теперь решение уравнения (9) в функциях Бесселя . Проделав аналогичные выкладки, получаем дисперсионное уравнение вида

$$\frac{I_{m+1}(k_m/2)}{I_m(k_m/2)} + \frac{{r_0}^j (U_0/c_m - 1)^2}{\sqrt{N^2/{w_m}^2 - 1}} \frac{J_{m+1}(k_{1m}/2)}{J_m(k_{1m}/2)} = 0. \tag{21}$$

В уравнении (21) перейдем от круговой частоты w_m и волнового числа k_m к фазовой скорости c_m и длине волны λ_m по формулам $k_m = 2p / l_m$, $w_m = c_m 2p / l_m$. Для упрощения анализа введем замену

$$x = p / l_m / \sqrt{(N\, l_m / 2p\, c_m)^2 - 1} \tag{22}$$

и преобразуем уравнение (21) к виду

$$J_{m+1}(x) + e(x) J_m(x) = 0, \tag{23}$$

где

$$e(x) = \frac{N^2 (l_m / p)^3 x}{r_0{}^j [2U_0 \sqrt{1 + (l_m x / p)^2} - N (l_m / p)^2 x]^2} \frac{I_{m+1}(p / l_m)}{I_m(p / l_m)}. \tag{24}$$

Коэффициент $e\ (x)$, входящий в дисперсионное уравнение (23) , всегда положительный. Следовательно, левая часть уравнения (23) может изменить знак только при различных знаках $J_m(x),\ J_{m+1}(x)$. Из графиков функций Бесселя $J_m(x),\ J_{m+1}(x)$ видно [6] , что действительный корень уравнения (23) находится между корнями функций Бесселя $J_m(x),\ J_{m+1}(x)$. Тогда из (22) и уравнения (23) получим оценку для границ фазовой скорости

$$\frac{N (l_m / p)^2}{2\sqrt{(l_m / p)^2 + 1/(c_{m,i})^2}} < c_m < \frac{N (l_m / p)^2}{2\sqrt{(l_m / p)^2 + 1/(c_{m+1,i})^2}},$$

где $c_{m,i}, c_{m+1,i}$ $(i = 1,2,...)$ - корни функций Бесселя $J_m(x),\ J_{m+1}(x)$.

Оценим порядок коэффициента $e\ (x)$ по данным, приведенным в [7]: частота плавучести $N < 1$ ($N \approx 0{,}1$), плотность струи $r_0{}^j \approx 1$, и скорость течения $U_0 \approx 6$. Для действительных значений λ_m отношение

$$\frac{I_{m+1}(p / l_m)}{I_m(p / l_m)} \le 1,\ \frac{I_{m+1}(p / l_m)}{I_m(p / l_m)} = 1 \qquad (l_m \to 0),$$

$$\frac{I_{m+1}(p / l_m)}{I_m(p / l_m)} \to \frac{1}{2}\frac{p}{l_m} \quad (l_m \to \infty).$$

Следовательно,

$$e(x) \approx \frac{N^2 (l_m / p)^3 x}{4 r_0{}^j U_0^2} \quad (l_m \to 0), \qquad e(x) \approx \frac{1}{2 r_0{}^j x (l_m / p)^2} \quad (l_m \to \infty).$$

Значения коэффициента $e\ (x)$ были вычислены для широкого диапазона изменения длины волны l_m. В результате вычислений установлено, что в рассмотренном диапазоне изменения l_m.величина $e\ (x)$ не превосходит порядка 10^{-5} . Следоватедьно, с погрешностью, не превышающей порядка 10^{-5} , решением уравнения (23) является значение корня функции Бесселя $J_{m+1}(x)$. Таким образом с этой же степенью точности могут быть определены фазовая и групповая скорости

$$c_m = N c_{m+1,i} \left(l_m / p \right)^2 / 2 / \sqrt{1+\left(l_m c_{m+1,i} / p \right)^2} \,,$$

$$c_{g_m} = -c_m / \left[1 + \left(l_m c_{m+1,i} \right)^2 \right].$$

На рис 1. и 2 представлены результаты расчетов, из которых следует, что несимметричность мало влияет на фазовые скорости (кривые, соответствующие модам 0, 1, 2, мало отличаются). В то же время групповая и фазовая скорости имеют различные знаки, откуда следует, что энергия переносится в направлении, обратном направлению распространения волн.

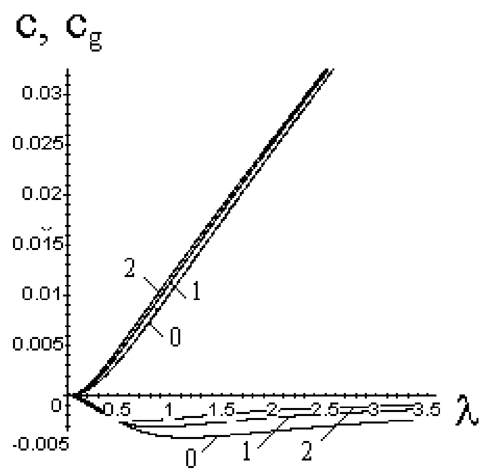

Рис. 1. Зависимость фазовой и групповой скоростей от длины волны. (Кривые с номерами 0, 1, 2 относятся к случаям m=0,1,2).

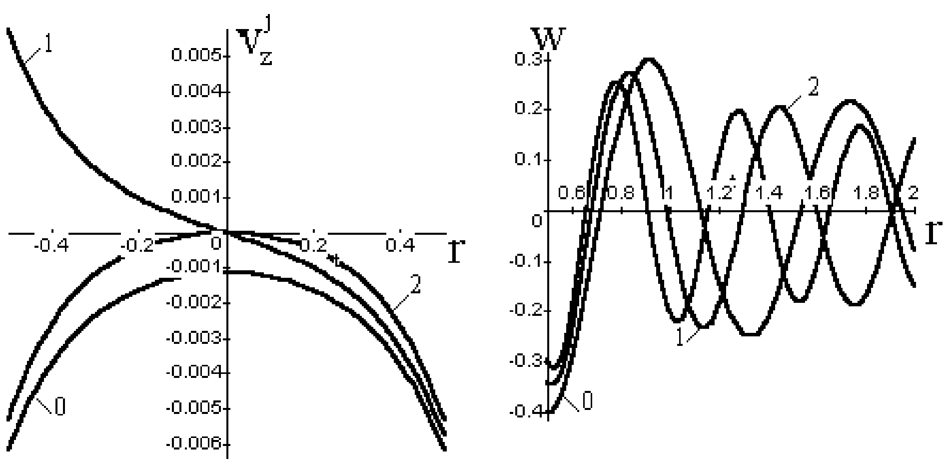

Рис. 2. Зависимость первой моды от r в струе - v_z^j, ($\lambda = 1$), во внешней области - w.

Численный анализ волновых мод показал, что волновые моды в струе и во внешней области существенно различны. Формы волновых мод в струе зависят от длины волны, в то время как волновые моды во внешней среде не зависят от длины волны. Кроме того, перенос энергии в струе существенно меньше, чем во внешней приструйной области.

Из проведенного выше анализа следует, что для действительных величин круговой частоты w_m и волнового числа $\mathrm{k_m}$ не существует решений в классе бегущих волн, распространяющихся в стратифицированной жидкости от струи в радиальном направлении. Однако существуют локализованные возле струи волновые возмущения, которые распространяются вдоль струи, и это находится в соответствии с экспериментальными данными, приведенными в [7].

Работа выполнялась при частичной поддержке проектом INTAS N 99-1637.

Список использованной литературы.

1. Селезов И.Т., Хук П., Шпакова С.Г. Волновые возмущения стратифицированной жидкости от вертикальной струи. - Прикл. гидромеханика, 1999, 1 (73), N 2. - С. 38-44.
2. Selezov I., Huq P. Internal waves generated by a jet in a density stratified cross-flow. - Abstracts and Invited Lectures, 18th Symposium “Vibrations in Physical Systems”, Poznan - Blazejewko, May 27-30, 1998. - P. 241-242.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.3, ч.2. - М.: ГИФМЛ, 1958. 674 с.
4. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. - Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 304 с.
5. Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs and Mathematical Tables /Edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. - National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, 1964. - 832 p.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. - М.: Наука, 1968. - 344 с.
7. Huq P. Observations of jets in density stratified grossflows. Atmospheric Envirinment. 1997, 31, №13. - P. 2011-2022.

Поступила в редколлегию 09.08.2001 г.