КОЛЕБАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 681.5.015.42

Е.А.ШУШЛЯПИН, канд. техн. наук, Севастоп. гос. техн. ун-т

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Предложено обобщение метода Дункана расчета ковариационных матриц динамических систем, заданных нормальными системами дифференциальных уравнений с дифференцируемыми нелинейными функциями правых частей и аддитивным белым шумом. Особенностью обобщения является использование якобиана от функций правых частей системы, детерминированных уравнений системы, а также ковариаций между вектором состояния и нелинейными членами тейлоровских разложений функций правых частей.

Рассмотрим задачу определения ковариационной матрицы как функции времени для системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Phi(t, x(t)) + B(t) \cdot x(t),$$
$$t \in [t_0, t_f],\ x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

где $x(t)$ - вектор центрированных белых шумов с матрицей интенсивностей $Q(t)$, x^0- вектор случайных начальных условий с математическим ожиданием $\bar{x}^0$, ковариационной матрицей D_{xx}^0 и произвольным законом распределения. Детерминированные внешние воздействия $v(t)$, в том числе и возможные ненулевые математические ожидания, по предположению входят в вектор F. Относительно вектор-функции F предположим, что она имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Для линейных систем, когда $\Phi(t,x(t)) = A(t) \cdot x(t) + C(t) \cdot v(t)$, вектор математических ожиданий $\bar{x}(t)$ (здесь и далее верхней чертой обозначаются математические ожидания) и ковариационная матрица $D_{xx}(t)$ рассчитываются по известным уравнениям Дункана [1].

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A(t)\bar{x} + C(t)v(t),$$

$$\frac{dD_{xx}}{dt} = A(t)D_{xx} + D_{xx}A(t)^T + B(t)Q(t)B(t)^T, \tag{2}$$

$$t \in [t_0, t_f], \ \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0, \ D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0.$$

Отметим, что уравнения (2) получены в результате решения уравнений Колмогорова для плотности вероятностей диффузионного процесса при нормально распределенном $\bar{x}^0$ и гауссовском белом шуме. В предлагаемом нами выводе обобщенных уравнений Дункана, которые для линейных систем являются точными, такое предположение не делается.

В основу вывода положим интегральное соотношение Алексеева [2] между конечным и текущими состояниями нелинейной системы с дифференцируемыми нелинейностями, которое для системы (1) имеет вид

$$x(J) = y(J,t,x(t)) + \int_t^J W(J,t,x(t)) \cdot B(t) \cdot x(t)\,dt,$$

$$\frac{dy}{dJ} = \Phi(J,y), \ \ y(t,t,x(t)) = x(t),$$

$$\frac{dW}{dJ} = \left[\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=y(J,t,x(t))} \right] \cdot W, \ W(t,t,x(t)) = I, \tag{3}$$

$$J \in [t, t_f], \ t \in [t_0, t_f].$$

Переменные $y(J,t,x(t))$, которые мы называем переменными конечного состояния, отображают прогноз конечного (в момент J) состояния невозмущенной системы, находящейся в момент t в состоянии $x(t)$.

Примененная далее схема вывода использовалась нами при получении первоначального варианта алгоритма ковариационного анализа [3], который имеет непрерывно-дискретный вид и менее детализированную оценку погрешности.

Из (3) следует, что нелинейная весовая матрица зависит от случайного текущего состояния и также является случайной. Представим ее в виде суммы неслучайной и случайной составляющих

$$W(J,t,x(t)) = W(J,t,\tilde{x}(t)) + D(J,t,x(t)). \tag{4}$$

Неслучайную составляющую $W(t_f, t, \tilde{x}(t))$ определим уравнениями, аналогичными (3), где $\tilde{x}(t)$- текущее состояние детерминированной системы, следующей из (1). У этой детерминированной системы начальное условие - математическое ожидание начальных условий из (1), а внешнее воздействие (белый шум) отсутствует. Соответствующие уравнения в данном случае имеют вид

$$\frac{d\tilde{y}(J,t)}{dJ} = \Phi[J, \tilde{y}(J,t)],$$

$$\frac{d\overline{W}(J,t)}{dJ} = A(J, \tilde{x}(t)) \cdot \overline{W}(J,t),$$

$$A(J,\tilde{x}(t)) \equiv \left\{ \frac{\P\Phi_{\mathrm{i}}(J,x)}{\P \mathrm{x}_{\mathrm{j}}} \right\} \Bigg|_{x=\tilde{y}(J,t)}, \; i,j = 1 \mathbf{K}\, n, \tag{5}$$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \Phi(t, \tilde{x}(t)),$$

$$J \in [t, t_f], \quad \tilde{y}(t,t) = \tilde{x}(t), \quad W(t,t,x(t)) = I,$$

$$t \in [t_0, t_f], \quad \tilde{x}(t_0) = \bar{x}^0,$$

где I - единичная матрица.

Вводя сокращенные обозначения

$$y \equiv y(J,t,x(t)), \bar{y} \equiv y(J,t,\bar{x}(t)), D_{yy} \equiv D_{yy}(J,t),$$

$$W \equiv W(J,t,x(t)), x \equiv x(t), B \equiv B(t),$$

$$\overline{W}(J,t) = W(J,t,\tilde{x}(t)), \; \Delta \equiv \Delta(J,t,x(t)),$$

вычислим матрицу ковариаций переменных конечного состояния как функцию ϑ.

Для этого подставим (4) в первое соотношение из (3) и выразим оттуда y.

$$y(J,t,x(t)) = x(J) - h(J,t) - z(J,t),$$

$$h(J,t) = \int_t^J \overline{W}(J,t) B(t) x(t) dt, \tag{6}$$

$$z(J,t) = \int_t^J \Delta(J,t,x(t)) B(t) x(t) dt.$$

Далее, опуская для краткости аргументы, получим выражение для искомой матрицы ковариаций.

$$D_{yy} = M\left[(y-\bar{y})(y-\bar{y})^T\right] = M\left[(x-\bar{x}-h+\bar{h}-z+\bar{z})(y-\bar{y})^T\right] =$$
$$= M\left[(x-\bar{x})(y-\bar{y})^T\right] - M\left[(h-\bar{h})(y-\bar{y})^T\right] - M\left[(z-\bar{z})(y-\bar{y})^T\right].$$

Преобразуем каждое слагаемое полученного выражения, в итоге получим

$$D_{yy} = D_{xx} + D_{hh} + D_{zz} + D_{hz} + D_{hz}^T - D_{xz} - D_{xz}^T - D_{hx} - D_{hx}^T. \qquad (7)$$

Из (7) следует выражение, которое ввиду ограниченности объема статьи приведем без доказательства

$$D_{yy}(J,t) = D_{xx}(J) - \int_t^J \overline{W}(J,t)B(t)Q(t)B^T(t)\overline{W}^T(J,t)dt + o_m(d), \qquad (8)$$
$$J = t+d,\ d>0,$$

где $o_m(d)$ бесконечно малая относительно d матрица.

При доказательстве (8) использован почленный анализ (7) с учетом (6) и аналогичных (14) разложений матриц $W, \overline{W}$. При этом использованы свойства ковариационной матрицы белого шума, показано, что $z(t+d,t) = \int_t^{t+d} D(t+d,t,x(t))B(t)dh(t)$ - стохастический интеграл Ито с оценкой приращения винеровского процесса $dh = \sqrt{d}$ [4], откуда следует

$$z(t+d,t) = M(t)\cdot B(t)\cdot d\cdot\sqrt{d} = o_v(d),$$

где M - некоторая ограниченная матрица.

Выразим из (8) искомую матрицу $D_{xx}(J)$.

$$D_{xx}(J) = D_{yy}(J,t) + \int_t^J \overline{W}(J,t)B(t)Q(t)B^T(t)\overline{W}^T(J,t)dt - o_m(d), \qquad (9)$$
$$J = t+d,\ d>0.$$

Для определения $D_{yy}(J,t)$, входящего в (9), воспользуемся тем обстоятельством, что при достаточно малом приращении времени d нелинейная весовая матрица приближается к линейной ввиду малого изменения $x(t)$ на рассматриваемом интервале. Для доказательства этого найдем разложения по первому аргументу нелинейной и линеаризованной весовых матриц детерминированной системы в окрестности точки t. Для построения линеаризованной весовой матрицы запишем линеаризованную относительно детерминированного решения $\tilde{x}$ систему. Для этого выделим линейную часть тейлоровского разложения правой части (1) и вычтем из полученного уравнения детерминированные уравнения.

В итоге получим

$$\frac{dx^L(J)}{dJ} = \left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(J)} \right] \cdot x^L(J) + R(x^L(J)) + \tag{10}$$

$$+ B(J)x(J),\ J \in [t, t+d],\ x^L(J) = x(J) - \tilde{x}(J).$$

Заметим, что остаточный член тейлоровского разложения (10) $R(x^L(J))$ не является в общем случае бесконечно малой величиной. В сущности, (10) - точный эквивалент (1), где лишь заменена переменная и выделена линейная часть. Далее рассмотрим эту систему на малом временном интервале, когда остаточный член приближенно постоянный и имеет место линеаризация в привычном понимании этого термина. Выполняя разложение $R(x^L(J))$ по степеням δ, представим его в виде

$$R(x^L(t+d)) = R(x^L(t)) + O_v(d), \tag{11}$$

где $O_v(d)$ - вектор бесконечно малых величин порядка d.

Линеаризованная весовая матрица, соответствующая системе (10), определяется как функция первого аргумента выражением

$$\frac{dW^L(J,t)}{dJ} = \left[\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(J)} \right] \cdot W^L(J,t), \tag{12}$$

$$J \in [t, t+d],\ W^L(t,t) = I.$$

Теперь найдем указанные выше разложения нелинейной W и линеаризованной W^L весовых матриц, заданных уравнениями (5) и (12) соответственно.

$$W(t+d, t, \tilde{x}(t)) = W(t, t, \tilde{x}(t)) +$$

$$+ \left[\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{x=\tilde{y}(t,t)} \right] \cdot W(t, t, \tilde{x}(t)) \cdot d + o_m(d), \tag{13}$$

$$W^L(t+d,t)=W^L(t,t)+$$
$$+\left[\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t)}\right]\cdot W^L(t,t)\cdot d+o_m(d).$$

Учитывая, что $W(t,t,\tilde{x}(t))=I$, $W^L(t,t)=I$, а $\tilde{y}(t,t)=\tilde{x}(t)$, получаем

$$W(t+d,t,\tilde{x}(t))=I+\left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t)}\right]\cdot d+o_m(d), \qquad (14)$$

$$W^L(t+d,t)=I+\left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t)}\right]\cdot d+o_m(d),$$

а $W(t+d,t,\tilde{x}(t))-W^L(t+d,t)=o_m(d)$, что и требовалось доказать.

Поскольку на малом интервале линеаризованная в окрестности детерминированного решения и нелинейная весовые матрицы совпадают с точностью до $o_m(d)$, а линеаризованная матрица неслучайная, в последующих выкладках вместо W^L будем использовать введенную ранее детерминированную часть нелинейной весовой матрицы $\overline{W}$.

Далее определим $D_{yy}(t+d,t)$ с учетом того, что при малом δ нелинейная весовая матрица может быть заменена линеаризованной. Для линеаризованной системы (10) векторная переменная конечного состояния $y^L(t+d,t)$ согласно ее определению из (3) при $F(t,x^L)\equiv\left[\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}(t)}\right]+R(x^L(t))$ выразится:

$$y^L(t+d,t)=\overline{W}(t+d,t,\tilde{x}(t))x^L(t)+\int_t^{t+d}\overline{W}(t+d,t,\tilde{x}(t))R(x^L(J))dt=$$
$$=\overline{W}(t+d,t,\tilde{x}(t))\cdot\left[x^L(t)+R(x^L(t))\cdot d+O_v(d)\cdot d\right]+o_v(d)= \qquad (15)$$
$$=\overline{W}(t+d,t,\tilde{x}(t))\cdot\left[x^L(t)+R(x^L(t))\cdot d\right]+o_v(d),$$

где $R(x^L(t))$ - случайная величина; $o_v(d)$ - вектор бесконечно малых относительно d величин. При получении (15) интеграл заменен площадью прямоугольника, член $O_v(d)\cdot d$ внесен в $o_v(d)$.

С учетом неслучайности $\tilde{y}$ и равенства

$$D_{y^L y^L} = M[(y^L - \bar{y}^L)(y^L - \bar{y}^L)^T] =$$

$$= M[(y - \bar{y} - (\tilde{y} - \bar{\tilde{y}}))(y - \bar{y} - (\tilde{y} - \bar{\tilde{y}}))^T] =$$

$$= M[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T] = D_{yy}$$

вычислим ковариационную матрицу $D_{yy}(t+d,t)$ через y^L из (15). Опуская для краткости записей аргументы, имеем

$$y^L = \overline{W}\cdot[x^L + R\cdot d] + o_v$$

$$\bar{y}^L = M[\overline{W}\cdot[x^L + R\cdot d] + o_v] = \overline{W}\left[\bar{x}^L + \overline{R}\cdot d\right] + \bar{o}_v,$$

где x^L, R, o_v - случайные векторы.

Бесконечно малый случайный вектор o_v представим в виде произведения случайной матрицы K на неслучайный бесконечно малый вектор $\tilde{o}_v$. Тогда, обозначив

$$g = x^L + R\cdot d,\ \bar{g} = \bar{x}^L + \overline{R}\cdot d,$$

$$g^0 = g - \bar{g} = x^L - \bar{x}^L + R^0\cdot d,\ R^0 = R - \overline{R},$$

$$o_v^0 = K^0\tilde{o}_v,\ K^0 = K - \overline{K},$$

получим

$$D_{yy}(t+d,t) = M[(\overline{W}\cdot g^0 + K^0\tilde{o}_v)\cdot(\overline{W}\cdot g^0 + K^0\tilde{o}_v)^T] =$$

$$= \overline{W}\cdot D_{gg}\cdot\overline{W}^T + \overline{W}\cdot D_{go} + D_{go}^T\cdot\overline{W}^T + D_{oo},$$

где

$$D_{gg} = M[g^0(g^0)^T],\ D_{go} = M[g^0(K^0\tilde{o}_v)^T],\ D_{oo} = M[K^0\tilde{o}_v(K^0\tilde{o}_v)^T].$$

Из последних выражений следует, что D_{go}, D_{oo} - бесконечно малые матрицы с верхней оценкой $o_m(d)$. Таким образом, имеем

$$D_{yy}(t+d,t) = \overline{W}D_{gg}\overline{W}^T + o_m(d). \qquad (16)$$

Далее вычислим D_{gg} с учетом неслучайности $\tilde{x}$. При этом

$$x^L - \bar{x}_L = x - \tilde{x} - \bar{x} + \bar{\tilde{x}} = x^0,\ x^0 = x - \bar{x}\ .$$

$$D_{gg} = M[(x^0 + R^0 \cdot d) \cdot (x^0 + R^0 \cdot d)^T] =$$
$$= D_{xx} + D_{RR} \cdot d^2 + (D_{xR} + D_{Rx}) \cdot d\,,$$

где

$$D_{xR} = M[(x - \overline{x})(R - \overline{R})^T], \quad D_{Rx} = D_{xR}^T. \tag{17}$$

Таким образом, выражение (16) приобретет вид

$$D_{yy}(t+d,t) = \overline{W}[D_{xx} + D_{RR}d^2 + (D_{xR} + D_{Rx})d]\overline{W}^T + o_m(d), \tag{18}$$

где ковариационные матрицы правой части являются функциями t, весовая матрица $\overline{W} \equiv W(t+d,t,\tilde{x}(t))$.

Подставим (18) в (9), заменяя $\overline{W} \equiv W(t+d,t,\tilde{x}(t))$ его разложением (13), а интеграл - площадью прямоугольника. Кроме того, все члены со степенями d, выше первой, внесем в $o_m(d)$. В результате получим

$$D_{xx}(t+d) =$$
$$= \overline{W}(D_{xx} + D_{RR}d^2 + (D_{xR} + D_{Rx})d)\overline{W}^T + \overline{W}BQB^T\overline{W}^T d + o_m(d) =$$
$$= \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}d\right] D_{gg} \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}d\right]^T + \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}d\right] BQB^T \left[I + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}}d\right]^T d +$$
$$+ o_m(d) = D_{gg} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} D_{gg}d + D_{gg}\frac{\partial \Phi^T}{\partial \tilde{x}}d + BQB^T d + o_m(d) =$$
$$= D_{xx} + (D_{xR} + D_{Rx})d + \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} D_{xx}d + D_{xx}\frac{\partial \Phi^T}{\partial \tilde{x}}d + BQB^T d + o_m(d),$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{x}} \equiv \left[\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=\tilde{x}(t)}, \quad B \equiv B(t),\ Q \equiv Q(t),\ D_{\mathrm{ij}} \equiv D_{ij}(t),\ d > 0.$$

Из полученного выражения предельным переходом $\delta \to 0$ следует дифференциальное уравнение для искомой матрицы ковариаций. Поскольку в этом уравнении используется решение детерминированной системы, для определения ковариаций нужна объединенная система

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \mathrm{F}(t,\tilde{x}(t)),$$
$$\frac{dD_{xx}(t)}{dt} = A(\tilde{x}(t))D_{xx}(t) + D_{xx}(t)A^T(\tilde{x}(t)) +$$
$$+ B(t)Q(t)B^T(T) + D_{xR}(t) + D_{xR}^T(t),$$

$$t \in [t_0, t_f], \; D_{xx}(t_0) = D_{xx}^0, \; \tilde{x}(t_0) = \bar{x}(t_0) \equiv \bar{x}^0,$$

$$A(\tilde{x}(t)) = \left[\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} \right] \Bigg|_{x = \tilde{x}(t)} . \qquad (19)$$

Уравнения (19) являются искомым результатом. Данный алгоритм является принципиально точным, однако его реализация в общем случае затруднительна ввиду неизвестности ковариационной матрицы D_{xR}, определяемой выражением (17). Напомним, что R - это вектор нелинейных членов тейлоровского разложения вектор-функции F правых частей системы (1).

Сравнивая (19) с (2), видим, что (19) является обобщением уравнений Дункана на нелинейные системы с гладкими нелинейностями и аддитивно входящими случайными воздействиями типа белого шума. В линейном случае, когда $F = A(t) + C(t)v(t)$ и $R = 0$, алгоритмы (19) и (2) совпадают. При этом математическое ожидание определяется как детерминированное решение $\tilde{x}$. В нелинейном случае детерминированное решение и математическое ожидание могут значительно отличаться, хотя во многих случаях они достаточно близки. Общий порядок системы (19) такой же, как и уравнений Дункана, т.е. $n + n(n+1)/2$, где n-размерность вектора x, т.е. порядок системы (1).

Анализ влияния ковариационной матрицы D_{xR} на точность статистического моделирования и способ ее оценивания вместе с соответствующими примерами будут опубликованы в отдельной работе.

Список использованной литературы

1. Батков А.М. Методы оптимизации в статистических задачах управления / А.М.Батков, В.М.Александров, А.О.Мишулина, А.Н.Староверов, Б.А.Щукин.- М.:Машиностроение, 1974.-240с.
2. Алексеев В.М. Об одной оценке возмущений обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М.Алексеев // Вестн. Москов. ун-та. Сер.1.Математика, механика. - 1961. - №2. - С.28 - 36.
3. Шушляпин Е.А. Статистический анализ динамических систем на основе моделей конечного состояния /Е.А.Шушляпин // Труды Международной конференции по автоматическому управлению «Автоматика-2000», Т.2.-Львов: Госуд. НИИ информационной инфраструктуры, 2000.С.234-238.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. / И.И.Гихман, А.В.Скороход.-Введение в теорию случайных процессов.-М.:Наука, 1977.-568с.

Поступила в редколлегию 14.05.2001 г.