УДК 539.3

А.Р.СНИЦЕР, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

# ЗАДАЧА ЛЭМБА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ СВОБОДНЫХ ГРАНИЦАХ

Рассмотрена задача Лэмба для полупространства с цилиндрической полостью. Условия на границах соответствуют 1-й основной задаче с нулевыми напряжениями всюду, кроме круговой линии на плоской поверхности, вдоль которой задано нормальное гармоническое воздействие.

Решения строятся посредством интегральных потенциалов Ламэ, связанных с ядрами преобразований Вебера и Фурье. Задача сводится к неклассическому интегральному уравнению 3-го рода с кусочно непрерывным ядром, правой частью и функциональными коэффициентами перед искомой функцией. Для устранения сингулярностей в интегральных ядре и правой части уравнения, использовался метод контурных преобразований в комплексной плоскости. Полученное уравнение с выделенными особенностями предполагает численное решение.

В работах [9,10] рассматривались задачи о гармонических колебаниях полупространства с цилиндрической полостью при перекрестных граничных условиях [1] или , как в [6] , при задании напряжений только на цилиндрической поверхности, а на плоской – радиального перемещения и нормального напряжения. В указанных случаях задачи решаются в замкнутом виде. В случае 1-й основной задачи, когда на всех границах заданы напряжения, для рассматриваемой геометрической области, задача замкнутого решения не допускает. Для данной области именно такая задача, с нулевыми напряжениями на границах, имеет особый интерес, т.к. в этом случае как на плоской, так и на цилиндрической поверхностях возникают поверхностные волны Рэлея [8] и Био [7] соответственно, имеющие большое значение в вопросах сейсмологии, при анализе взрывов и в других приложениях.

Рассмотрим первую основную задачу для уравнения Ламэ в упругой среде занимающей область : $z \geq 0$, $r \geq a$ . Граничные условия на плоской и цилиндрической поверхностях имеют вид:

$$s_z = s_0(r) = -p_0 d(r-b) e^{iwt}, \quad t_{rz} = 0, \qquad z = 0; \qquad (1)$$

$$s_r = 0, \qquad t_{rz} = 0 \qquad r = a. \qquad (2)$$

Для решения уравнения динамики упругой среды будем использовать представление Ламэ [4] и соответствующие потенциалы разыскивать в виде :

$$y_0(r,z) = \int_0^\infty x A_0(x) G_{1,0}(x,r) e^{-k_1 z}\, dx + \sqrt{\tfrac{2}{p}} \int_0^\infty B_0(l) K_0[r k_1(l)] \sin lz\, dl \qquad (3)$$

$$y_2(r,z)=\int_0^\infty xA_1(x)G_{1,1}(x,r)e^{-k_2 z}dx+\sqrt{\tfrac{2}{p}}\int_0^\infty B_1(l)K_1[rk_2(l)]\cos lz\,dl\,, \qquad (4)$$

$$y_1(r,z)=y_3(r,z)\equiv 0.$$

Здесь: $G_{1n}(x,r)=c_{1n}(x,r)\left|H_1^{(2)}(xa)\right|^{-2}, (n=0,1)-$ ядро обращения преобразований Вебера [5,9], $c_{1n}(x,r)=J_1(xa)Y_n(xr)-J_n(xr)Y_1(xa)$, $J_n(x), Y_n(x), H_1^{(2)}(x)-$ цилиндрические функции; $K_n(x)-$функция Макдональда; $k_{1,2}(x)=\sqrt{x^2-k_{1,2}^2}$, $k_{1,2}=w/c_{1,2}-$ волновые числа; $c_1, c_2$ – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно $w$ – циклическая частота.

Решим вспомогательную задачу с прежними условиями (2) на цилиндрической границе, а на плоской границе вместо нулевого тангенциального напряжения зададим радиальное перемещение, т.е. вместо (1) положим:*

$$s_z=s_0(r)=-p_0 d(r-b)e^{iwt},\ u_r=u_0(r), \qquad z=0. \qquad (5)$$

Условия (5) дают:

$$A_0(x)=-k_2^{-2}\left[m^{-1}\bar{s}_0(x)+2x\bar{\bar{u}}_0(x)\right],$$
$$A_1(x)=-k_2^{-1}k_2^{-2}\left[m^{-1}x\,\bar{s}_0(x)+(2x^2-k_2^2)\bar{\bar{u}}_0(x)\right] \qquad (6)$$

где трансформанты преобразований Вебера от $s_0(r)$ и $u_0(r)$ имеют вид:

$$\bar{s}_0(x)=\int_a^\infty r s_0(r)c_{1,0}(x,r)dr\,,\quad \bar{\bar{u}}_0(x)=\int_a^\infty r u_0(r)c_{1,1}(x,r)dr\,.$$

Удовлетворяя 2-му из условий (2) на полости $-t_{rz}(a,z)=0$, получим соотношение между интегральными плотностями $B_0(x), B_1(x)$:

$$B_0(l)=\frac{2l^2-k_2^2}{2lk_1}\,\frac{K_1(ak_2)}{K_1(ak_1)}B_1(l). \qquad (7)$$

Вернемся к исходной задаче (1),(2). Выполним 2-е из условий (1) – $t_{rz}(r,0)=0$ на плоской границе, что позволяет итключить трансформанту $\bar{\bar{u}}_0(x)$, возникшую при решении всмомогательной задачи. Для этого подставим (3), (4), (6), (7) в условие:

$$t_{rz}=m\left\{2\frac{\partial^2 y_0}{\partial r\partial z}-\left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_2^2\right)y_2\right\}=0, \qquad z=0.$$

---

* Подобная задача при $u_0(r)=0$ рассматривалась в [6].

Используя в полученном интегральном уравнении преобразование Вебера и значение интеграла*

$$\int_a^\infty r K_1(r k_{1,2})\, c_{1,1}(x,r)\,dr = \frac{2}{p}\,\frac{K_1(r k_{1,2})}{x^2+k_{1,2}^2},$$

получим выражение для $\bar{\bar{u}}_0(x)$:

$$\bar{\bar{u}}_0(x)=\frac{k_2^2 k_2^2(x)}{l(x)}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty (2l^2-k_2^2)K_1[k_2(l)]\left[\frac{1}{x^2+k_1^2(l)}-\frac{1}{x^2+k_2^2(l)}\right]B_1(l)\,dl-$$

$$-\frac{x}{l(x)}(2x^2-k_2^2-2k_1k_2)\,\bar{s}_0(x), \qquad (8)$$

здесь $l(x)$ – определитель Рэлея [8]:

$$l(x)=(2x^2-k_2^2)^2-4x^2k_1k_2, \qquad (9)$$

Подставляя (8) в выражения (6) для плотностей $A_j(x)$ получим их представление через плотность $B_1(l)$ и граничное значение задачи $\bar{s}_0(x)$. Для окончательного решения исходной задачи необходимо найти интегральную плотность $B_1(l)$. Воспользуемся еще нереализованным граничным условием:

$$s_r\big|_{r=a}=-m\left\{\left[2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+k_2^2\right]y_0+2\frac{\partial^2 y_2}{\partial r\,\partial z}\right\}\Bigg|_{r=a}=0.$$

В итоге получим уравнение для функции $X(t)=B_1(t)K_1[ak_2(t)]$, через которую выражается неизвестная интегральная плотность $B_1(l)$:

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^\infty D(t)X(t)\sin(tz)\,dt-\frac{4}{a}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{5}{2}}\int_0^\infty(2l^2-k_2^2)\,X(l)K(l,z)\,dl=2Ck_2^2\,F(z), \qquad (10)$$

здесь:

$$F(z)=\int_0^\infty\frac{G_{1,0}(x,b)}{l(x)}\,j_1(x,z)\,dx, \qquad K(l,z)=\int_0^\infty M(x)f(x,l)\,j_2(x,z)\,dx, \qquad (11)$$

$$M(x)=\frac{x\,k_2(x)}{l(x)\left|H_1^{(2)}(x\,a)\right|^2}, \quad f(x,l)=\sum_{j=1}^{2}\frac{(-1)^{j+1}}{x^2+k_j^2(l)}, \quad C=\frac{2}{p}\,\frac{b}{a}\,\frac{p_0}{m}\,\frac{1}{k_2^2}, \qquad (12)$$

$$j_1(x,z)=P(k_{1,2})\exp(-zk_1)-4x^2k_1k_2\exp(-zk_2), \qquad (13)$$

* Убедиться в справедливости такого интеграла можно, например, обращая преобразование Вебера и вычисляя полученный интеграл методом контурных преобразований в комплексной плоскости, представляя ядро $G_{1,1}(x,r)$ как в [6]

$$j_2(x,z)=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}(2k_j^2+k_2^2)e^{-zk_j}\,,\qquad P(k_{1,2})=\prod_{j=1}^{2}(2k_j^2+k_2^2)\qquad(14)$$

$l(x)$ определено в (9); $D(t)$ в (10) – определитель Био[7]:

$$D(t)=4tk_2\left[\frac{1}{ak_2}-\mathbf{K}(ak_2)\right]-\frac{2t^2-k_2^2}{t}\left[\frac{a}{2}+\frac{2t^2-k_2^2}{k_1}\mathbf{K}(ak_1)\right],\qquad(15)$$

$$\mathbf{K}(bk_j)=K_0(bk_j)/K_1(bk_j).\qquad(16)$$

В (13)-(14) $k_j$ – функция переменной $x$, а в (15) – $t$.

Формально,(10) посредством обращения синус-преобразования Фурье сразу же сводится к интегральному уравнению 3-го рода. Однако в силу неоднозначности радикалов $k_{1,2}$ и особенностей, которые содержат подынтегральные функции в (11), для получения разрешимого интегрального уравнения выберем ветви радикалов и проведем контурные преобразования интегралов (11) в комплексной плоскости. Для этого каждая из подынтегральных функций представляется в виде суммы 2-х функций комплексной переменной $z=x+ih$, определенных на 4-х листной римановой поверхности. Ветви радикалов $k_{1,2}(x)$ выбираются так, что $Re\,k_{1,2}(x)>0$ и $Im\,k_{1,2}(x)>0$, тогда, с учетом временного множителя, решения (3),(4) при $z\to\infty$ удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда [2], если $0<x<k_{1,2}$ и затухают на бесконечности, если $x>k_{1,2}$. Разрезы проводились вдоль $Re\,k_{1,2}(x)=0$ из точек ветвления $z=\pm k_{1,2}$ двузначных функций $k_{1,2}(z)$.С целью получения физически реализуемых решений, выберем лист римановой поверхности, на котором $Re k_{1,2}(z)>0$. Для правильного учета полюсов подынтегральных функций в (11), использовался принцип предельного поглощения [1,3]: $k_{1,2}$ заменялось на $k'_{1,2}=k_{1,2}-ik'$ $(0<k'<<k_{1,2})$.

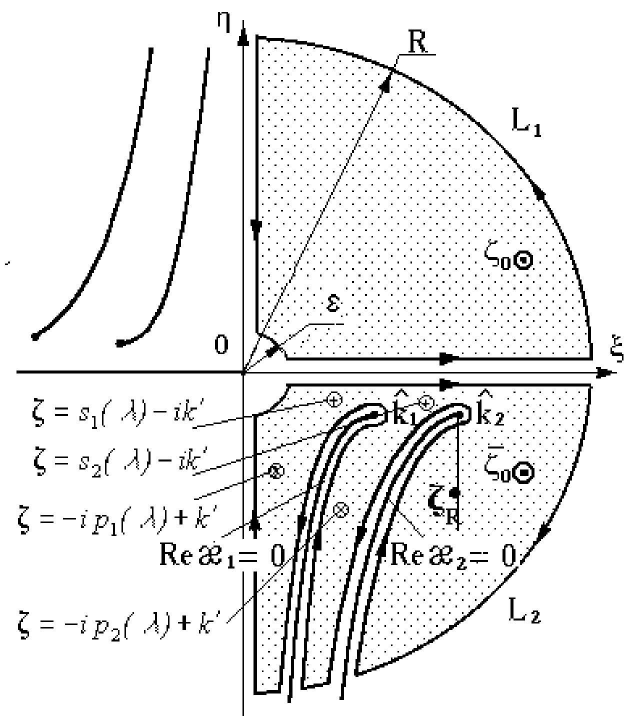


Рис. 1

Для вычисления $F(z)$, рассмотрим сумму контурных интегралов:

$$\sum_{m=1}^{2}(-1)^m \oint_{L_m} \mathrm{F}_m(z,z)dz = -2p\, i\left[Res\ \mathrm{F}_2(z_R,z)+\sum_{k=1}^{2}Res\,\mathrm{F}_k(z_k,z)\right], \quad (17)$$

$$\mathrm{F}_m(z,z)=\mathbf{H}^{(m)}(z\,b)\frac{j_1(z,z)}{l(z)}\ ,\quad \mathbf{H}^{(m)}(z\,b)=\frac{H_0^{(m)}(z\,b)}{H_1^{(m)}(z\,a)}. \quad (18)$$

Контуры $L_m$ и полюса* $z_R$, $z_1 = az_0$, $z_2 = a\bar{z}_0$ показаны на рис.1. После предельных переходов $|z| = e \to 0$, $|z| = R \to \infty$ и $k' \to 0$ для $F(z)$ получим:

$$F(z)=\int_0^{\infty}\left\| f_1(h), f_2(h)\right\|\begin{pmatrix} sin\,a_1 z \\ sin\,a_2 z\end{pmatrix}dh + \int_0^{k_1}\left\| g_1(x), g_2(x)\right\|\begin{pmatrix} sin\,s_1 z \\ sin\,s_2 z\end{pmatrix}dx -$$

$$-4\int_{k_1}^{k_2}\left\| h_1(x),\ h_2(x),\ h_3(x)\right\|\begin{pmatrix} e^{-k_1 z} \\ cos\,s_2 z \\ sin\,s_2 z\end{pmatrix}dx +$$

$$+\frac{2p}{a}Re\frac{\mathbf{H}^{(2)}(\bar{z}_0 b)}{l(\bar{z}_0)}j_1(\bar{z}_0,z)+\frac{p\,\mathbf{H}^{(2)}(x_R b)}{l'(x_R)}j_1(x_R,z), \quad (19)$$

где введены обозначения строчных матриц:

$$\left\| f_1(h),\ f_2(h)\right\| = \frac{\mathbf{K}(hb)}{l(h)\big|_0^{\infty}}\left\| \prod_{j=1}^{2}(2a_j^2 - k_2^2), -4h^2 a_1 a_2 \right\|, \quad (20)$$

$$\left\| g_1(x),\ g_2(x)\right\| = \frac{\mathbf{H}^{(2)}(x\,b)}{l(x)\big|_0^{k_1}}\left\| P(k_{1,2}),\ \ 4x^2 s_1 s_2\right\|, \quad (21)$$

$$\left\| h_1(x), h_2(x), h_3(x)\right\| =$$

$$= -\frac{x^2 k_1 s_2 \mathbf{H}^{(2)}(x\,b)}{(2x^2-k_2^2)^4+16x^4k_1^2s_2^2}\left\| P(k_{1,2}),\ -(2x^2-k_2^2)^2,\ -4x^2k_1s_2\right\|, \quad (22)$$

$$l(h)\big|_0^{\infty} = (2a_j^2-k_2^2)^2-4h^2a_1a_2,\quad l(x)\big|_0^{k_1}=(2x^2-k_2^2)^2+4x^2s_1s_2, \quad (23)$$

$$l'(x_R)=\frac{4k_2^3 s_0}{(2s_0^2-1)^2}\left(2+\frac{2}{n-1}s_0^4-\frac{1}{2s_0^2}\right), \quad (24)$$

$x_R = k_2 s_0$, $s_0$ - безразмерный корень определителя Рэлея; $n$ - коэффициент Пуассона.

---

* вещественный корень $x_R$ определителя Рэллея $l(x_R)=0$ при введении малого затухания в среду смещается в 4-ю четверть комплексной плоскости: $z_R = x_R - id$, $(0 < d << 1)$; $z_{1,2}$ — комплексные корни функций Ханкеля $H_1^{(1,2)}(z)$.

$$a_j=\sqrt{h^2+k_j^2}\;;\quad s_j=\sqrt{k_j^2-x^2}\;;\quad k_j=\sqrt{x^2-k_j^2}\,. \qquad (25)$$

Функции $a_j, s_j, k_j$ здесь и далее, если нет оговорок противного, зависят от переменной интегрирования.

Для преобразования интеграла $K(l,z)$ рассматривается сумма контурных интегралов:

$$\sum_{j=1}^{2}\oint_{L_j} M_j(z)f(z,l)j_2(z,z)dz=-2pi\left[\sum_{j=1}^{2}f(z_j,l)j_2(z_j,z)ResM_j(z_j)+\right.$$

$$\left.+f(x_R,l)j_2(x_R,z)ResM_2(x_R)+\sum_{k=1}^{2}M_2(z_k)j_2(z_k,z)Resf(z_k,l)\right] \qquad (26)$$

Функции $f$ и $j_2$ определяются согласно (12) и (14), а функции $M_j(x)$ в (26) отличаются от $M(x)$ в (11) тем, что здесь квадрат модуля функции Ханкеля по-разному представляется в 1-й и 4-й четвертях комплексной плоскости*:

$$M_j(z)=\frac{z\,k_2(z)}{2l(z)H_1^{(j)}(za)[2J_1(za)-H_1^{(j)}(za)]}\,, \qquad (27)$$

здесь в 1-й четверти комплексной плоскости полагаем $j=1$, в 4-й – $j=2$. Вычеты функции $M_j(z)$ в (26) – $x_R$, $z_1=az_0$, и $z_2=a\bar{z}_0$ совпадают с вычетами функции $F_m(z,z)$ в (17). В данном случае добавляются вычеты от функции $f(z_k,l)$. Отметим, что эти вычеты зависят от значений параметра $l$. На вещественной оси полюса находятся в точках $x=\pm s_{1,2}(l),\ 0<l<k_{1,2}$; а на мнимой – в точках $x=\pm i\,p_{1,2},\ \ l>k_{1,2},\ (p_{1,2}=k_{1,2})$. Учитывая выбор ветвей функций $s_{1,2}(l), p_{1,2}(l)\ (Res_{1,2}>0,\ Imk_{1,2}>0)$ и введенное в среду затухание, можно показать, что полюса $x=s_{1,2}(l)$ и полюса $x=-i\,p_{1,2}(l)$ смещаются в 4-ю четверть комплексной плоскости соответственно с вещественной и мнимой осей (см. рис.1).

Проведя соответствующие выкладки, аналогичные преобразованию интеграла $F(z)$, для $K(l,z)$ получим выражение:

$$K(l,z)=i(k_1^2-k_2^2)\left\{-\frac{p^2}{4}\int_0^\infty\sum_{j=1}^{2}a_j(l,h)Q_j(h,z)dh+\right.$$

$$+\int_0^{k_1}\frac{S_1(x,l)}{l(x)\big|_0^{k_1}}\sum_{j=1}^{2}(2k_j^2+k_2^2)\cos s_j z dx+$$

* Различие представлений позволяет выполнить лемму Жордана для подынтегральных функций в 1-й и 4-й четвертях соответственно.

$$+\int_{k_1}^{k_2}(2x^2-k_2^2)S_2(x,l)\left\|h_1,\ h_2,\ h_3\right\|\begin{pmatrix} e^{-k_1 z}\\ \cos s_2 z\\ \sin s_2 z\end{pmatrix}dx+$$

$$\left.+\frac{p}{ia}Re\frac{iN(z_0,l)j_2(z_0,z)}{l(z_0)J_1(z_0 a)H_0^{(1)}(z_0 a)}-p\frac{N(x_R,l)j_2(x_R,z)}{l'(x_R)\left|H_1^{(2)}(x_R a)\right|^2}\right\}-$$

$$-2pi\sum_{k=1}^{2}M_2(z_k)j_2(z_k,z)Res f(z_k,l), \qquad (28)$$

где

$$a_j(l,h)=\frac{(-1)^j(2a_j^2-k_2^2)ha_2}{K_1(ha)l(h)\big|_0^\infty\left[p^2I_1^2(ha)+k_1^2(ha)\right]\prod_{j=1}^{2}(l^2-a_j^2)},$$

$$Q_j(h,z)=K_1(ha)\sin(a_j z)+p\,I_1(ha)\cos(a_j z),$$

$$S_j(x,l)=x\,s_j\,/\left|H_1^{(2)}(xa)\right|^2\cdot\prod_{j=1}^{2}(k_j^2(x)+l^2),$$

$$N(x,l)=xk_2(x)/\prod_{j=1}^{2}(k_j^2(x)+l^2). \qquad (29)$$

Распределение вычетов функции $f(z_k,l)$ в (26) следующее:

$$z_{1,2}=s_{1,2}(l),\quad \text{если}\quad 0<l<k_{1,2},$$
$$z_1=-ip_1(l),\quad z_2=s_2(l),\ \text{если}\quad k_1<l<k_2,$$
$$z_{1,2}=-ip_{1,2}(l),\ \text{если}\quad l>k_2.$$

Запишем выражение для суммы вычетов в (28):

$$\mathrm{Q}(l,z)=\sum_{k=1}^{2}M_2(z_k)j_2(z_k,z)Res f(z_k,l)=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{A_1}\cdot\begin{Vmatrix}e_1\\ e_2\end{Vmatrix}, \quad 0<l<k_1; \quad \mathbf{A_2}\cdot\begin{Vmatrix}e_1\\ e_2\end{Vmatrix}-A_{12}\cdot\begin{Vmatrix}e_3,\ k_1<l<\mathrm{D}k\\ e_4,\ \mathrm{D}k<l<k_2\end{Vmatrix},\ k_1<l<k_2;\\ \mathbf{A_3}\cdot\begin{Vmatrix}e_1\\ e_2\\ e_4\end{Vmatrix}, \qquad l>k_2.\end{cases} \qquad (30)$$

где $\mathbf{A_j}\ (j=1,2,3)$ – строчные матрицы:

$$\mathbf{A_1}=\left\|A_{11},\ A_{12}\right\|=\left\|-b_1\left[V(s_1)+V(s_2)\right],\ b_3V(s_2)\right\|,$$

$$\mathbf{A_2}=\left\|A_{21},\ A_{22}\right\|=\left\|b_1\left[V(-ip_1)+V(s_2)\right],\ -b_2V(-ip_1)\right\|,$$

$$\mathbf{A_3}=\left\|A_{31},A_{32},A_{33}\right\|=\left\|-b_1\left[V(-ip_1)+V(-ip_2)\right],-b_2V(-ip_1),b_3V(-ip_2)\right\|,$$

$$V(x)=M_2(x)/x;\qquad b_1=b_1(l)=2l^2-k_2^2,$$
$$b_2=b_2(l)=2k_1^2-2l^2-k_2^2,\quad b_3=b_3(l)=3k_2^2-2l^2-2k_1^2; \tag{31}$$

$$e_1=e_1(l,z)=e^{-ilz}, e_2=e_2(l,z)=e^{-iz\sqrt{l^2+\mathrm{D}k^2}}, e_3=e_3(l,z)=e^{-z\sqrt{\mathrm{D}k^2-l^2}},$$
$$e_4=e_4(l,z)=e^{-iz\sqrt{l^2-\mathrm{D}k^2}};\qquad \mathrm{D}k=\sqrt{k_2^2-k_1^2},\qquad (k_1<\mathrm{D}k<k_2). \tag{32}$$

$s_j, p_j=k_j$ – функции $l$ определенные согласно (25).Все интегралы в (28) понимаются в смысле Коши.

Теперь, когда функции $F(z)$ и $K(l,z)$ однозначно определены и в них выделены все особенности, применим обращение преобразования Фурье к (10). В результате получим интегральное уравнение 3-го рода:*

$$\mathrm{D}(t)X(t)-\frac{4}{a}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{5}{2}}\int_0^{\infty}(2l^2-k_2^2)X(l)\overline{K}^{sin}(l,t)dl=2Ck_2^2\,\overline{F}^{sin}(t). \tag{33}$$

Применяя синус-преобразование Фурье по $z$ к выражениям (19) и (28), получим правую часть и ядро интегрального уравнения (33).

$$\overline{F}^{sin}(t)=t\sum_{j=1}^{2}\sqrt{\frac{2}{p}}\left[\underset{t>k_j}{\frac{f_j(k_j)}{k_j}}+\underset{0<t<k_j}{\frac{g_j(s_j)}{s_j}}-\underset{0<t<k_2}{4d_{j2}\frac{h_3(s_2)}{s_2}}-\underset{0<t<\infty}{\frac{8}{p}\int_{k_1}^{k_2}\frac{h_j(x)dx}{t^2+k_j^2}}\right]+$$
$$+p\,t\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{2}{a}Re\frac{\mathbf{H}^{(2)}(\overline{z}_0 b)}{l(\overline{z}_0)}\cdot\frac{b_j(\overline{z}_0)}{k_j^2(\overline{z}_0)+t^2}+\frac{\mathbf{H}^{(2)}(x_R b)}{l'(x_R)}\cdot\frac{b_j(x_R)}{k_j^2(x_R)+t^2}\right] \tag{34}$$

В (34) под знаком первой суммы $k_j, s_j$ – функции переменной $t$, определенные согласно (25); $d_{jk}=\begin{cases}1 \text{ если } j=k\\ 0 \text{ если } j\neq k\end{cases}$ – символ Кронеккера;

$$b_1(x)=\prod_{n=1}^{2}(2k_n^2(x)+l^2),\quad b_2(x)=-4x^2k_1(x)k_2(x).$$

Для ядра интегрального уравнения (33) получается выражение:

$$\overline{K}^{sin}(l,t)=i(k_1^2-k_2^2)\left\{-\frac{\pi^2}{4}T_1(\lambda,t)+T_2(\lambda,t)+T_3(\lambda,t)+W(\lambda,t)\right\}-2pi\overline{Q}^{sin}(l,t) \tag{35}$$

где

* определитель Био $\mathrm{D}(t)$ имеет вещественный ноль в точке $t=t_{Bio}$, [6,7].

$$T_1(l,t) = tp\sum_{j=1}^{2}\left(\int_0^\infty I_1(ha)\frac{a_j(l,h)}{t^2-a_j^2}dh + K_1(h_j a)\frac{a_j(l,h_j)}{2h_j}\bigg|_{\substack{h_j=\sqrt{t^2-k_j^2}\\ t>k_j}}\right),$$

$$T_2(l,t) = t\sqrt{\frac{2}{p}}\int_0^{k_1}\frac{S_1(x,l)}{l(x)\big|_0^{k_1}}\sum_{j=1}^{2}\frac{2k_j^2+k_2^2}{t^2-s_j^2}dx,$$

$$T_3(l,t) = t\sqrt{\frac{2}{p}}\int_{k_1}^{k_2}(2x^2-k_2^2)S_2(x,l)\sum_{j=1}^{2}\frac{h_j(x)}{t^2+k_j^2}dx +$$

$$+t\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{(2x^2-k_2^2)}{x}S_2(x,l)h_3(x)\bigg|_{x=s_2(t),\ (t<k_2)},$$

$$W(l,t) = \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\left[\frac{p}{ia}Re\frac{iN(z_0,l)}{l(z_0)J_1(z_0a)H_0^{(1)}(z_0a)}\cdot\frac{2k_j^2(z_0)+k_2^2}{k_j^2(z_0)+t^2} - \right.$$

$$\left. -p\frac{N(x_R,l)}{l'(x_R)\left|H_1^{(2)}(x_Ra)\right|^2}\cdot\frac{2k_j^2(x_R)+k_2^2}{k_j^2(x_R)+t^2}\right]. \qquad (36)$$

Вычисляя синус-преобразование Фурье от суммы вычетов в (30), мы разобьем полученный результат на сумму двух слагаемых, так что:

$$\overline{\mathrm{Q}}^{sin}(l,t) = \overline{\mathrm{Q}}^{sin}_{ker}(l,t) + \overline{\mathrm{Q}}^{sin}_{d}(l,t), \qquad (37)$$

$$\overline{\mathrm{Q}}^{sin}_{ker}(l,t) = \begin{cases} \underset{(0<l<k_1)}{\mathbf{A_1}\left\|\begin{matrix}E_1\\E_2\end{matrix}\right\|}; \underset{(k_1<l<k_2)}{\mathbf{A_2}\left\|\begin{matrix}E_1\\E_2\end{matrix}\right\| - A_{12}\cdot E_3}; \mathbf{A_3}\left\|\begin{matrix}E_1\\E_2\\E_3\end{matrix}\right\|, (l>k_2), \end{cases} \qquad (38)$$

$$E_j = t\sqrt{\frac{2}{p}}\left[(t^2-l^2)^{-1}d_{1j} + (t^2-l^2-\mathrm{D}k^2)^{-1}d_{2j} + (t^2-l^2+\mathrm{D}k^2)^{-1}d_{3j}\right],$$
$$E_3 = E_4,$$

$$\overline{\mathrm{Q}}_d^{sin}(l,t)=\begin{cases} \mathbf{A_1}\cdot\left\|\begin{matrix}E_1^d,\ (0<t<k_1)\\ E_2^d,(\mathrm{D}k<t<k_2)\end{matrix}\right\|, & 0<l<k_1;\\ \mathbf{A_2}\cdot\left\|\begin{matrix}E_1^d,(k_1<t<k_2)\\ E_2^d,(k_2<t<\sqrt{k_2^2+\mathrm{D}k^2})\end{matrix}\right\| - \begin{pmatrix}A_{12}\cdot E_4^d,\\ (0<t<k_1),\\ (\mathrm{D}k<l<k_2)\end{pmatrix}, & k_1<l<k_2;\\ \mathbf{A_3}\cdot\left\|\begin{matrix}E_1^d,\ \ (t>k_2)\\ E_2^d,\ (t>\sqrt{k_2^2+\mathrm{D}k^2})\\ E_4^d,\ (t>k_1)\end{matrix}\right\|, & l>k_2,\end{cases} \qquad (39)$$

$$E_j^d=-i\sqrt{\frac{p}{2}}\left[d_{1j}d(t-l)+d_{2j}d(t-\sqrt{l^2+\mathrm{D}k^2})+d_{4j}d(t-\sqrt{l^2-\mathrm{D}k^2})\right].$$

В (38),(39) $E_j, E_j^d\ (E_3^d=0,\ j=\overline{1,4})$, представляют синус-преобразования Фурье от функций $e_j(l,z)$ определенных в (32).

В результате подстановки (37) в (33), интегральное уравнение существенно изменяется. Первое слагаемое в (37) остается частью ядра интегрального уравнения (33), т.е. новое ядро получается из (35) заменой $\overline{\mathrm{Q}}^{sin}(l,t)$ на выражение $\overline{\mathrm{Q}}_{ker}^{sin}(l,t)$, определенное согласно (38). Второе слагаемое в (37) содержит дельта-функции Дирака, так что после подстановки последнего в (33) в интегральном уравнении появляются дополнительные члены $D(t)$ с искомой функцией $X$ от различных сложных аргументов на разных участках с соответствующими функциональными множителями. Приведем выражения этих дополнительных членов:

$$D(t)=g_1(t)\cdot \underset{t>0}{X(t)}+g_2(t)\cdot \underset{t>\mathrm{D}k}{X(\sqrt{t^2-\mathrm{D}k^2})}+g_3(t)\cdot \underset{t>0}{X(\sqrt{t^2+\mathrm{D}k^2})}, \qquad (40)$$

где функциональные множители $g_j(t)$ имеют вид:

$$g_1(t)=t\,m(t)\left[\underset{0<l<k_1}{A_{11}(t)e(k_1-t)}+\underset{k_1<l<k_2}{A_{21}(t)e(t-k_1)e(k_2-t)}+\underset{l>k_2}{A_{31}(t)e(t-k_2)}\right],$$

$$g_2(t)=t\,m(l)\left[\underset{0<l<k_1}{A_{12}(l)e(t-\mathrm{D}k)}e(k_2-t)+\underset{k_1<l<k_2}{A_{22}(l)e(t-k_2)e(\sqrt{k_2^2+\mathrm{D}k^2}-t)}+\right.$$

$$\left.\left.+\underset{l>k_2}{A_{32}(l)e(t-\sqrt{k_2^2+\mathrm{D}k^2})}\right]\right|_{l=\sqrt{t^2-\mathrm{D}k^2}},$$

$$g_3(t)=t\,m(l)\left.\left[-\underset{\mathrm{D}k<l<k_2}{A_{12}(l)e(k_1-t)}+\underset{l>k_2}{A_{33}(l)e(t-k_1)}\right]\right|_{l=\sqrt{t^2+\mathrm{D}k^2}}. \qquad (41)$$

Элементы $A_{jk}$ строчных матриц $\mathbf{A}_j$ определены в (31); $m(l)=$ $=(32/p)(2l^2-k_2^2)l^{-1}$; $e(t-a)$ – единичная функция Хэвисайда.

Дадим некоторые пояснения структуры добавки (40). Как указано в (39), промежутки изменения $l$ и $t$ взаимосвязаны, поэтому в (40) каждому члену $g_j(t)X[t(t)]$ на указанном промежутке изменения $t$ соответствует определенный отрезок интегрирования по $l$ в уравнении (33). Важно также сказать, что если $t$ изменяется в соответствующих пределах, то вещественный аргумент $t(t)$ функции $X(t)$ будет изменяться в тех же пределах, что и переменная интегрирования $l$ в (33)на соответствующем отрезке. Сделанные замечания важны для предполагаемой численной реализации интегрального уравнения (33) после его дополнительного исследования.

Зная решение $X(t)$ интегрального уравнения, мы находим интегральную плотность $B_1(l)=X(t)/K_1[ak_2(t)]$, и согласно (8),(6),(7) – все остальные интегральные плотности потенциалов Ламэ (3),(4), через которые выражается напряженно-деформированное состояние в любой точке рассмотренной области.

## Список использованной литературы


1. Гринченко В.Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.- Киев: Наук. думка, 1978.- 264 с.
2. Зоммерфельд А.. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. - М., 1950. - 456 с.
3. Митра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. - М.: Мир, 1974. - 324 с.
4. Новацкий В., Теория упругости. - М.: Мир,1975. - 872 с.
5. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.1. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. -278 с.
6. Сницер А.Р. Поверхностные волны на полости в полубесконечной упругой среде.// Динамические системы. -2000. - Вып. 16. - С. 70-80.
7. Bio M.A. Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bore Containing a Fluid // J. Appl. Physics. - 1952.- Vol.23, No 9. - pp.997 - 1005.
8. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. - 1885/1886. - Vol.17, No 253. - pp. 4 - 11.
9. Malits P.Ya., Snitser A.R. Torsional Oscillations of a Circular Die on an Elastic Half-Space with a Cylindrical Cavity.//Journal of Soviet Mathemaics.-1993. - Vol.65, No.3. - pp. 1629-1634.
10. Jonson E.R., Parnes R. Prpog. of Axisymm. Waves in an Elastic half-space containing a Cylind. inclusion. Part I : Formulation and general solution // Q. J. Mech. & Appl. Math. - 1977. - V.30, N 3. - pp. 235 - 253.


Поступила в редколлегию 17.08.2001