строенной относительно $W_{*1},...,W_{*N}$, и оптимального значения задачи (1)-(4) на $W_1,...,W_N$ либо, если это возможно, оценки (10).

Полученные в работе результаты устанавливают зависимость оптимального решения рассматриваемой задачи от количества и правых частей ограничений (2), (3) и позволяют оценивать сверху оптимум преобразованной задачи разбиения (1), (4)-(6) без ее решения.

Список использованной литературы

1. Киселева Е.М. Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множества и их приложения: Автореф. дис…. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09/ Днепропетр. гос. ун-т. – Киев, 1991. – 33 с.

Поступила в редколлегию 12.04.2001

УДК 519.85

Т.Ф. СТЕПАНЧУК, асп. каф. ВМ и МК, Днепропетр. нац. ун-т

О ВИДЕ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ В МЕТОДЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ОСНОВАННОМ НА ОПТИМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ МНОЖЕСТВ

Исследуется проблема выбора функции штрафа в методе оптимального разбиения множеств, применяемом для отыскания глобального минимума одномерной недифференцируемой функции $f(x)$, заданной на множестве $\Omega = [a,b]$. Предлагается новый вид штрафной функции, проводится анализ эффективности ее использования. Исследуется эффективность алгоритма, использующего предложенный вид штрафной функции на известном наборе тестовых функций.

В данной статье рассмотрен метод глобальной оптимизации недифференцируемой функции одной переменной, имеющей не более N локальных минимумов, основанный на применении метода оптимального разбиения множеств [1]. Задача поиска точки глобального минимума функции $f(x)$ на Ω сводиться к задаче отыскания оптимального разбиения допустимой области Ω на N зон притяжения локальных минимумов $t_i^*, i=\overline{1,N}$, с одновременным отысканием координат центров этих зон, совпадающих с соответствующими точками локальных минимумов исходной функции $f(x)$ на Ω.

Пусть $f(x)$– действительная почти дифференцируемая функция [2], определенная на $\Omega = [a,b]$, число локальных минимумов которой не превосходит N. Пусть в некоторой подобласти Ω_i, $1 \le i \le N$, области Ω функция $f(x)$ одноэкстремальна. Точку локального минимума функции $f(x)$ в подобласти Ω_i обозначим через τ_i^* и пусть $\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega$. Подобласть Ω_i называют зоной притяжения локального минимума τ_i^*.

Приведем здесь постановку задачи оптимального разбиения множества Ω на подмножества $\Omega_1,...,\Omega_N$ с отысканием координат центров $\tau_1,...,\tau_N$ этих подмножеств, к которой сводиться задача отыскания координат локальных минимумов функции $f(x)$ на Ω и их зон притяжения:

$$\min_{\{\Omega_1,...,\Omega_N\}\{\tau_1,...,\tau_N\}} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c(x,\tau_i)dx \tag{1}$$

при условиях

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, \tag{2}$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \ne j,\ i,j = 1,2..N. \tag{3}$$

Функции $c(x,\tau_i)$– действительные, определенные на $\Omega \times \Omega$, ограниченные, измеримые по x при любом фиксированном $\tau_i = (\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})$ из Ω.

Как следует из [3,4], оптимальное решение задачи (1)-(3) имеет для всех $i = 1,2,...,N$ и почти всех $x \in \Omega$ вид:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c(x,\tau_i^*) = \min\limits_{k=1..N} c(x,\tau_k^*), \text{ то } x \in \Omega_i^*, \\ 0, \text{ в остальных случаях, то } x \notin \Omega_i^*, \end{cases}$$

в качестве $\tau^* = (\tau_1^*,...,\tau_N^*)$ выбирается оптимальное решение задачи:

$$G(\tau) = \int_{\Omega} \min_{i=1,2...,N} c(x,\tau_i)\rho(x)dx \to \inf,$$

$$\tau = (\tau_1,..,\tau_N) \in \Omega^N.$$

Математическое обоснование алгоритма решения задачи (1)-(3) и более общих задач оптимального разбиения можно найти в [3].

Для того, чтобы оптимальное разбиение $\Omega_1^*,...,\Omega_N^*$ задачи (1)-(3) являлось разбиением области определения функции $f(x)$ на зоны притяжения локальных минимумов, а оптимальные координаты $\tau_1^*,...,\tau_N^*$ совпадали с координатами локальных минимумов функции $f(x)$ на

$\Omega = [a,b]$ необходимо, чтобы функция $c(x,t_i)$ являлась штрафом за ошибку, допускаемую при отнесении точки x из зоны притяжения одного локального минимума к зоне притяжения другого. Целью в задаче (1)-(3) является минимизация функционала суммарных потерь от неправильного разбиения области Ω на зоны притяжения $\Omega_1^*,...,\Omega_N^*$ и неправильного отыскания локальных минимумов $t_1^*,...,t_N^*$ в каждой из этих зон.

Таким образом, ключевым моментом в предлагаемом подходе является выбор функции штрафа $c(x,t_i)$.

В работах [1,3] рассматривался метод оптимального разбиения для случая, когда функция $c(x,t_i)$ имеет вид:

$$c(x,t_i) = \sqrt{(x^{(1)} - t_i^{(1)})^2 + ... + (x^{(n)} - t_i^{(n)})^2},$$

$$c(x,t_i) = \sum_{j=1}^{n} \left| x^{(j)} - t_i^{(j)} \right|,$$

$$c(x,t_i) = max\left\{ \left| x^{(1)} - t_i^{(1)} \right|,...,\left| x^{(n)} - t_i^{(n)} \right| \right\}.$$

В задачах глобальной оптимизации в качестве функции $c(x,t_i)$ выбиралась функция штрафа следующего вида [1]:

$$c(x,t_i) = f(t_i) + S\sum_{j=1}^{k} \max\left\{0, f(x+\frac{t_i - x}{k}j) - f(x+\frac{t_i - x}{k}(j-1))\right\} \quad (4)$$

где S – достаточно большое положительное число; k – натуральное число, характеризующее число делений отрезка $[x,t_i]$.

При практической реализации алгоритма решения задачи глобальной оптимизации, основанном на сведении ее к задаче (1)-(3), где в качестве функции $c(x,t_i)$ используется функция вида (4), область определения $\Omega = [a,b]$ минимизируемой функции $f(x)$ покрывается сеткой для вычисления интегралов, входящих в задачу (1)-(3) и кроме того, отрезок $[x,t_i]$ разбивается на k частей для вычисления функции $c(x,t_i)$, что значительно увеличивает число вычислений значений функции $f(x)$. Предлагаемая модификация штрафной функции предполагает уменьшение количества вычислений значений функции $f(x)$ за счет совмещения узлов сетки и точек делений отрезка $[x,t_i]$.

Здесь будем использовать $c(x,t_i)$ в виде:

$$c(x,t_i) = f(t_i) + S\sum_{j=1}^{r} \varphi_j(u), \quad (5)$$

где $\varphi_j(u)=\begin{cases}0, u\le 0\\ 1, u>0\end{cases}$, $u=f(x+H_x j)-f(x+H_x(j-1))$, $r=\left[\dfrac{t_i-x}{H_x}\right]$,
H_x – это шаг сетки, покрывающей область определения Ω минимизируемой функции $f(x)$.

Для тех случаев, когда каждое вычисление функции является дорогостоящим, или сложным, такой подход может быть оправдан. Хотя при этом описанный подход имеет как положительные стороны (уменьшение числа вычислений функции) так и некоторые отрицательные моменты (увеличение (в некоторых случаях) времени, затрачиваемого на решение задачи).

Кстати, штрафная функция вида (5) дает конструктивную возможность регулировать диаметр зон притяжения локальных минимумов, что является актуальным для задач глобальной оптимизации. Зная минимальное расстояние между ближайшими начальными приближениями для локальных минимумов, можно вычислить шаг сетки, покрывающей область определения $\Omega=[a,b]$ целевой функции $f(x)$ по формуле: $H_x=\dfrac{b-a}{M-1}$, где M выбирается из условия: $M\ge\dfrac{b-a}{min(t_i^0-t_j^0)}+1$. Затем, задавая экспериментально диаметр зоны притяжения локального минимума t_i, например $2\cdot H_x$, следует осуществить проверку выхода т. x из зоны притяжения локального минимума t_i диаметра $2\cdot H_x$, т.е. $t_i-x>2\cdot H_x$. Таким образом, используя функцию штрафа в виде (5) можно регулировать размер зоны притяжения локальных минимумов.

Проведем сравнительный анализ эффективности алгоритма глобальной оптимизации для функции $c(x,t_i)$, выбранной в виде (4) и (5). Эффективность алгоритмов, предназначенных для минимизации целевых функций вида (4) и (5), естественно сравнивать по количеству вычислений целевой функции, проводимых алгоритмом до полной остановки.

В данной работе использовался следующий набор тестовых функций [5-11].

1) $f_1(x)=(x^2-1)^2,\ -2\le x\le 2.$

2) $f_2(x)=x\cdot sin\,x,\ \ -7.85\le x\le 7.85.$

3) $f_3(x)=|x|+|x-1|-1,\ \ -2\le x\le 2.$

4) $f_4(x)=sin\,x+sin(10x/3)+ln\,x-0.84x+3,\ \ \ 3\le x\le 7.5.$

5) $f_5(x)=2-cos\,x-cos(2x),\ \ \ -1.5\le x\le 4.5.$

6) $f_6(x)=sin(1/x),\ \ \ 0\le x\le 1.$

7) $f_7(x)=(1-x)^2\cdot(x+1)^4\cdot(x-2)^3\cdot x, \quad -2\le x\le 2.$

8) $f_8(x)=\sin x+\sin(2x/3), \quad 3.1\le x\le 20.4.$

9) $f_9(x)=2(x-0.75)^2+\sin(8\pi x-\pi/2)-0.125,$
$0\le x\le 1, \ -2\le x\le 2.$

10) $f_{10}(x)=-\sum_{i=1}^{5} i\sin((i+1)x+i), \ -10\le x\le 10.$

11) $f_{11}(x)=(x+\sin x)\cdot\exp(-x^2), \quad -10\le x\le 10.$

12) $f_{12}(x)=\sin(x), \quad 0\le x\le 50, \ 0\le x\le 100, \ 0\le x\le 20.$

13) $f_{13}(x)=\left|\sin x+\sin(10x/3)+\ln x-0.84x+3\right|, \quad 3\le x\le 7.5.$

Часть результатов из многочисленных численных экспериментов приведена в таблице 1. Как видно, в таблицу 1 вынесены следующие параметры: $N_{fact.}$–фактическое количество локальных минимумов функции $f(x)$ на $\Omega=[a,b]$; $N_{exp.}$–ожидаемое пользователем количество локальных минимумов, если $N_{fact.}$ неизвестно; M –количество узлов сетки, которой покрывается область $\Omega=[a,b]$;

k – натуральное число дроблений отрезка $[x,t_i]$ при вычислении значений функции $\chi(x,t_i)$; $t^0=(t_1^0,..t_N^0)$–начальные приближения для локальных минимумов функции $f(x)$ на $\Omega=[a,b]$; LN –число корректно найденных локальных минимумов функции $f(x)$ на $[a,b]$; ε–точность вычисления координат локальных минимумов; ЧВЗ функции– число вычислений значений целевой функции до полной остановки алгоритма.

Рассмотрим функцию $f_{12}(x)$, имеющую в своей области определения 8 локальных минимумов (см. таблицу 1, эксп. 10). В случае, когда используется функция штрафа вида (4), при параметрах $N=10$ $M=20$ $k=25$, алгоритм находит все 8 локальных минимумов при ЧВЗ функции, равным 921 170 за 14 секунд. Когда же используется штрафная функция вида (5), при $N=10$ $M=25$ $k=5$ за 23 секунды алгоритм также находит все локальные минимумы. При этом ЧВЗ функции значительно уменьшается, здесь ЧВЗ функции =761 630. Вышеперечисленные особенности наблюдаются и при минимизации остальных тестовых функций.

Результаты работы алгоритма глобальной оптимизации, где

функция штрафа имеет вид (4)												функция штрафа имеет вид (5)							
№ экс.	Тест.функция		M	K	Начальное прибли-жение	NL		Точ-ность	Кол-во итер аций	ЧВЗ функции	Время счета		M	K	NL	Точ-ность	Кол-во итер аций	ЧВЗ функ-ции	Время счета
									I		м:с:сс						I		м:с:сс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1		3	2	3	(-2; 0; 2)	2	2	1,E-03	8	922	0:05:00	3	2	3	2	1,E-03	8	847	0:00:04
2		3	3	3	(-7.8; 0; 7.8)	3	3	1,E-02	10	2305	0:17:00	3	3	3	3	1,E-02	7	1946	0:00:15
3		4	3	4	(3; 4; 6; 7.5)	3	3	1,E-03	20	5156	0:09:00	3	3	4	3	1,E-03	20	4056	0:00:16
4		3	9	10	(-1.5; 2; 4,5)	2	2	1,E-03	16	23175	0:12:00	3	10	10	2	1,E-03	15	15974	0:00:28
5		4	20	12	(0.05;0.07;0.12; 0.24)	3	3	1,E-03	9	44652	0:05:00	4	12	20	2	1,E-03	5	10352	0:11:03
6		3	10	4	(-0.8; 0; 0)	3	3	1,E-03	18	12609	0:22:00	3	4	4	3	1,E-03	18	5245	0:00:20
7		4	3	4	(3; 7; 11;16)	3	3	1,E-03	17	5948	0:10:00	4	3	4	3	1,E-03	17	4324	0:00:21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8a	[0;1]	4	5	30	(0.4; 0.4; 0.4; 0.4)	3	3	1,E-03	18	7E+05	0:18:00	4	5	4	2	1,E-03	14	6882	0:00:27
		5	5	6	(0.2; 0.3;0.4; 0.6;0.8)	3		1,E-03	13	13105	0:07:00	5	5	6	3	1,E-03	15	11693	0:00:11
8b	[-2;2]	17	30	20	(2;1.75 1.5;1.2; -1;0.75;0.5;0.25; 0; 0.25; 0.5;0.71 .0;1.25; 1.5;1.7; 2)	16	17	1,E-03	32	1E+06	3:26:10	17	42	5	17	1,E-03	15	5E+05	3:45:10
9		3	4	5	(-2;0;2)	1	1	1,E-03	12	9888	0:10:00	3	4	5	1	1,E-03	12	8107	0:00:08
10		10	20	25	(2;6;12; 16;20;26;32;38 ;44;50)	8	8	1,E-03	47	9E+05	0:14:00	10	25	5	8	1,E-03	45	8E+05	0:23:00
11		5	16	16	(3;4;5;6 ;7)	4	4	1,E-03	30	2E+05	19:49:00	5	20	10	4	1,E-03	27	2E+05	0:23:00

Таким образом, предложенная модификация функции штрафа в виде (5) дает возможность сократить количество вычислений значений минимизируемой функции $f(x)$, что существенно для тех случаев, когда каждое вычисление ее значений является дорогостоящим или сложным.

Список использованной литературы

1. Е.М. Киселева. О применении методов оптимального разбиения множеств к решению задач глобальной оптимизации // Методы решения нелинейных задач и обработки данных.–Днепропетровск: ДГУ.–1985.–С.111-116.
2. Н.З.Шор. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение.–К.: Наукова думка.-1979.–199с.
3. Е.М. Киселева. Решение одной задачи оптимального разбиения с размещением центров тяжести подмножеств // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.–1989.–Т. 29.–№ 25.–С.709-722.
4. Е.М. Киселева, Н.З. Шор. Исследование алгоритма решения одного класса непрерывных задач разбиения // Кибернетика и системный анализ.–1994.–№1.–С.84-96.
5. Д. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир.–1975.-534с.
6. Р.Г. Стронгин. Численные методы в многоэкстремальных задачах.–М.: Наука.–1978.–240с.
7. А.Г. Сухарев. Оптимальные и последовательно-оптимальные алгоритмы в задачах численного анализа // Математические методы в исследовании операций/ Под редакцией Моисеева Н.Н., Краснощекова П.С.–М.: МГУ.–1981.–С.54-68.
8. А.Г. Сухарев. Минимаксные алгоритмы в задачах численногоо анализа.–М.: Наука.–1989.–300с.
9. А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. Методы поиска глобального экстремума.–М.: Наука.–1991.–248с.
10. А.Г. Жилинскас. Глобальная оптимизация: аксиоматика статистических моделей, алгоритмы, применения.–Вильнюс: Мокслас, 1986.–166с.
11. А.Г. Жилинскас, В.Р. Шалтянис. Поиск оптимума: компьютер расширяет возможности.– М.: Наука.–1989.–с.

Поступила в редколлегию 03.04.2001 г.