УДК 531.36

А.В. СТЕПАНОВ, канд. физ.-мат. наук., Крымкий агроун-т.

ОБ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОДНОМ РЕЗОНАНСЕ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

В задачах об устойчивости при внутреннем резонансе четного порядка возникают осложнения, вызываемые тем, что в системе дифференциальных уравнений, описывающей процесс, записанной в нормальной форме кроме членов внутреннего резонанса присутствуют и члены тождественного резонанса. Здесь в отличие от резонансов нечетного порядка, хотя и существует возможность асимптотической устойчивости, необходимые и достаточные условия устойчивости во всем пространстве получить нельзя [1].

Впервые на эту особенность обратил внимание В.И. Арнольд [2].

1. Общий случай и постановка задачи. Рассмотрим наиболее важный для приложений случай резонанса четвертого порядка, где для чисто мнимых $l_i (i=1,...,q)$ – собственных значений и базисных частот $w_k (k=1,...,m)$ критической системы вида

$$\dot{x}_s = \sum_{j=1}^{n} g_{sj} x_j + Y_s(x,t),$$

$$Y_s(x,t) = \sum_{l \ge 2}^{N} Y_s^{(l)}(x,t), \quad g_{sj} = \text{const} \tag{1}$$

выполняется соответствующее резонансное соотношение

$$\left\langle P^{(j)}, \Lambda \right\rangle = \sqrt{-1} \left\langle M^{(j)}, w \right\rangle. \tag{2}$$

Здесь $Y_s^{(l)}(x,t)$ – однородные полиномы степени l,

$$\Lambda = \left(l_1,..., l_q\right)^T, \quad j=1,...,q; \quad q \in Z, \quad q \ge 1;$$

$$M^{(j)} \in Z^{(m)}, \quad P^{(j)} = \left(p_1^{(j)},..., p_q^{(j)}\right),$$

$$\left|P^{(j)}\right| = \sum_{s=1}^{q} \left|p_s^{(j)}\right| = l_j \ge 2,$$

коэффициенты $p_s^{(j)}$ – целые положительные и отрицательные числа, включая нуль; q – целое число; $M^{(j)}$ – целочисленный вектор размерности m, l_j – порядок резонанса.

Критическую систему (1) можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_s = \sqrt{-1}v_s z_s + s_{\,s-1} z_{s-1} + \sum\limits_{l\ge 2} Z_s^{(l)}(z,\bar{z},x,t), \\ \dot{\bar{z}}_s = -\sqrt{-1}v_s \bar{z}_s + s_{\,s-1}\bar{z}_{s-1} + \sum\limits_{l\ge 2} \bar{Z}_s^{(l)}(z,\bar{z},x,t), \\ \dot{x}_a = d_{a-1}x_{a-1} + \sum\limits_{l\ge 2} Y_a^{(l)}(z,\bar{z},x,t) \quad (s_{\,0} = d_0), \end{cases} \tag{3}$$

где $z,\ \bar{z} - q -$ мерные комплексно-сопряженные, $x - p$ -мерный векторы; $Z_s^{(l)}, Y_a^{(l)} -$ однородные полиномы степени l, имеющие ту же структуру, что и $Y^{(l)}(x,t)$ исходной системы.

Полагая в (2) $p_1 + \ldots + p_n = 4 \ (2 \le n \le 4)$ и используя известную процедуру нормализации [3] в полярных координатах $z_s = r_s e^{iq_s}, \quad \bar{z}_s = r_s e^{-iq_s}$, получим:

$$\begin{cases} \dot{r}_s = 2r^{P/2} Q_s(q) + 2r_s \sum\limits_{k=1}^{q} a_{sk} r_k + \ldots \\ \dot{q} = \sum\limits_{s=1}^{n} p_s \left(r^{P/2 - E_s} Q_s'(q) + \sum\limits_{k=1}^{q} b_{sk} r_k \right) + \ldots \\ \qquad (s = 1,\ldots,n) \\ \dot{r}_a = 2r_a \sum\limits_{k=1}^{q} a_{sk} r_k + \ldots \\ r_a \dot{q}_a = v_a r_a + r_a \sum\limits_{k=1}^{q} b_{ak} + \ldots \\ (a = n+1,\ldots,q) \end{cases} . \tag{4}$$

Здесь

$$r^{P/2} = \prod_{b=1}^{n} r_b^{\,p_b/2}, \quad E_s = (0,\ldots,0,1,\ldots,0) \in R^n,$$

$$q = \sum_{s=1}^{n} p_s q_s, \quad Q_s(q) = a_s \cos q + b_s \sin q, \quad a_s, b_s = const.$$

Для получения достаточных условий устойчивости системы (4) в [1] применялась функция Ляпунова вида

$$2V = \sum_{s=1}^{n} g_s r_s + \sum_{a=n+1}^{q} r_a , \quad g_s = \mathrm{const}.$$

производная которой в силу (4)

$$\dot{V} = \sum_{s=1}^{n} g_s r_s \left(a_{s1} r_1 + \ldots + a_{sq} r_q\right) + \sum_{a=n+1}^{q} r_a \left(a_{a1} r_1 + \ldots + a_{aq} r_q\right) + \ldots \quad (5)$$

Отрицательная определенность квадратичной формы в (5) означала бы, что условия асимптотической устойчивости были бы выполнены.

2. Критерий асимптотической устойчивости при резонансе 1:3 для системы с двумя степенями свободы. Рассмотрим задачу о построении критерия асимптотической устойчивости нулевого решения в случае двух пар чисто мнимых корней $(q = 2)$ при внутреннем резонансе $l_1 = -3l_2$.. Модельная система в комплексно-сопряженных переменных будет иметь вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = i l_1 u_1 + R_{12} u_1 u_2 v_2 + R_{11} u_1^2 v_1 + R_1 v_2^3 \\ \dot{u}_2 = i l_2 u_2 R_{21} u_1 u_2 v_1 + R_{22} u_2^2 v_2 + R_2 v_1 v_2^2 \end{cases}. \quad (6)$$

Уравнения для v_1 и v_2 сопряжены с уравнениями системы (6). В (6) перейдем к полярным координатам r_1, r_2 и q по формулам: $r_1 = u_1 v_1, \quad r_2 = u_2 v_2, \quad q = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im} u_1}{\mathrm{Re} u_1} + 3\,\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im} u_2}{\mathrm{Re} u_2} + pk.$ Тогда получим

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = 2a_{11} r_1^2 + 2a_{12} r_1 r_2 + 2\sqrt{r_1 r_2}\left(a_1 \cos q + b_1 \sin q\right) \\ \dot{r}_2 = 2a_{21} r_1 r_2 + 2a_{22} r_2^2 + 2\sqrt{r_1 r_2}\left(a_2 \cos q + b_2 \sin q\right) \\ \dot{q} = (b_{11} + 3b_{21}) r_1 + (b_{12} + 3b_{22}) r_2 + \\ + \dfrac{\sqrt{r_1 r_2^3}}{r_1}\left(b_1 \cos q - a_1 \sin q\right) + 3\dfrac{\sqrt{r_1 r_2^3}}{r_2}\left(b_2 \cos q + a_2 \sin q\right). \end{cases}$$

Здесь $R_{mn} = a_{mn} + ib_{mn}; \quad R_m = a_m + ib_m \quad (m, n = 1,2).$ Рассматривая функцию

$$V = D_{11} r_1^2 + 2D_{12} r_1 r_2 + D_{22} r_2^2 - 2a\sqrt{r_1 r_2^3}\cos(q + l),$$

где D_{ij}, a и l − постоянные подлежащие определению; в силу (7) получим производную $\dot{V}$:

$$\tfrac{1}{4}\dot{V} = B_3 r_1^3 + B_2 r_1^2 r_2 + B_1 r_1 r_2^2 + B_0 r_2^3,$$

где

$$B_3 = D_{11}a_{11}; \quad B_2 = D_{11}a_{12} + D_{12}(a_{21} + a_{11});$$

$$B_1 = D_{12}(a_{22} + a_{12}) + D_{22}a_{21} + \tfrac{3}{2}a_2 t + \tfrac{3}{2}b_2 k;$$

$$B_0 = D_{22}a_{22} + \tfrac{1}{2}a_1 t + \tfrac{1}{2}b_1 k \quad (t = -a\cos l, \quad k = a\sin l).$$

Исследуем возможность того, что $V \cdot \dot{V} \le 0.$ Очевидно, что $V \cdot \dot{V} -$ форма 5-й степени

$$\Phi(r_1, r_2) = \left(D_{11}r_1^2 + 2D_{12}r_1 r_2 + D_{22}r_2^2 - 2a\sqrt{r_1 r_2^3}\cos(q + l)\right)\times$$

$$\times\left(B_3 r_1^3 + B_2 r_1^2 r_2 + B_1 r_1 r_2^2 + B_0 r_2^3\right) = D_{11}B_3 r_1^5 + (2D_{12}B_3 + B_2 D_{11})r_1^4 r_2 +$$

$$+ (D_{22}B_3 + 2D_{12}B_2 + D_{11}B_1)r_1^3 r_2^2 + (D_{22}B_2 + 2D_{12}B_1 + D_{11}B_0)r_1^2 r_2^3 +$$

$$+ (D_{22}B_1 + 2D_{11}B_0)r_1 r_2^4 + D_{22}r_2^5 - 2a\cos(q + l)\times$$

$$\times\left[B_2\sqrt{r_1^5 r_2^5} + B_1\sqrt{r_1^3 r_2^7} + B_3\sqrt{r_1^7 r_2^3} + B_0\sqrt{r_1 r_2^9}\right].$$

Осуществим замену переменных: $r_1 = x^2,\ r_2 = y^2.$ Тогда будем иметь:

$$\Phi^*(x, y) = D_{11}B_3 x^{10} + (2D_{12}B_3 + D_{11}B_2)x^8 y^2 -$$

$$- 2a\cos(q + l)B_3 x^7 y^3 + (D_{22}B_3 + 2D_{12}B_2 + D_{11}B_1)x^6 y^4 -$$

$$- 2a\cos(q + l)B_2 x^5 y^5 + (D_{22}B_2 + 2D_{12}B_1 + D_{11}B_0)x^4 y^6 -$$

$$- 2a\cos(q + l)B_1 x^3 y^7 + (D_{22}B_2 + 2D_{11}B_0)x^2 y^8 -$$

$$- 2a\cos(q + l)B_0 x y^9 + D_{22}B_0 y^{10}.$$

В силу того, что $x \ge 0$ и $y \ge 0$, исследуем свойства отрицательной знакоопределенности $\Phi^*(x, y)$ в первом координатном углу. Для этого применим известный критерий [4]. Форма $\Phi^*(x, y)$ будет отрицательно определена в конусе $x \ge 0$, $y \ge 0$ тогда и только тогда, когда системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{10,0}x^9 + \tfrac{9}{10}A_{9,1}x^8 y + \ldots + \tfrac{1}{10}A_{1,9}y^9 = m \\ \tfrac{1}{10}A_{9,1}x^9 + \tfrac{2}{10}A_{8,2}x^8 y + \ldots + A_{0,10}y^9 = m \end{cases}, \qquad (8)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ A_{0,10} y^9 = m \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = 0 \\ A_{10.0} x^9 = m \end{cases}. \tag{9}$$

не имели ненулевых решений в рассматриваемой области для любых $m \geq 0$. Здесь

$$A_{10.0} = D_{11} B_3; \quad A_{9,1} = 0; \quad A_{8,2} = 2D_{12} B_3 + D_{11} B_2;$$

$$A_{7,3} = -2a \cos(q + l) B_3; \quad A_{6,4} = D_{22} B_3 + 2D_{12} B_2 + D_{11} B_1;$$

$$A_{5,5} = -2a \cos(q + l) B_2; \quad A_{4,6} = D_{22} B_2 + 2D_{12} B_1 + D_{11} B_0;$$

$$A_{3,7} = -2a \cos(q + l) B_1; \quad A_{2,8} = D_{22} B_2 + 2D_{11} B_0;$$

$$A_{1,9} = -2a \cos(q + l) B_0; \quad A_{0,10} = D_{22} B_0.$$

Очевидно, что системы (9), если $A_{10,0} \leq 0$ и $A_{0,10} \leq 0$.

Далее, если (8) имеет указанное выше решение, то результант ее уравнений равен нулю. Тогда будем иметь

$$A_{10,0}\left(A_{0,10} y^9 - m\right) = \frac{1}{10} A_{9,1}\left(\frac{1}{10} A_{1,9} y^9 - m\right)$$

или

$$y^9 = \frac{10m\left(10A_{10,0} - A_{9,1}\right)}{100A_{10,0}A_{0,10} - A_{9,1}A_{1,9}}.$$

Отсюда - условие, необходимое для того, что бы система (8) не имела ненулевых решений в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, примет вид

$$\left(10A_{10,0} - A_{9,1}\right)\left(100A_{10,0}A_{0,10} - A_{9,1}A_{1,9}\right) \leq 0. \tag{10}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям в (10), получим:

$$\begin{cases} D_{22}\left(D_{22}a_{22} + \frac{1}{2}\left(a\ t + b_1 k\right)\right) \leq 0 \\ a_{11} \leq 0 \end{cases}.$$

Список использованной литературы

1. Веретенников В.Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1984. - 320 с.
2. Арнольд В.И. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений // УМН, 1970, т. 25, вып. 2, С. 256-266.