

УДК 517.9

А. В. ТАБОРОВ, Ин-т математики НАН Украины, Киев

ЧАСТНАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СИСТЕМАХ СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Изучается явление частной хаотической синхронизации глобально связанных осцилляторов на примере системы трех связанных логистических отображений. В области параметров найдены значения, при которых реализуется полная и частная синхронизация. Рассмотрены различные типы бифуркаций, происходящие при переходе системы из состояния полной синхронизации к частной.

Изучение систем глобально связанных осцилляторов является актуальной задачей в ряде областей – биологии, экономике, электронике. В частности, эти системы нашли применение в исследовании взаимодействия нейронов мозга [1, 6], различных форм турбулентности [2-4], передачи и кодирования информации, построении экономических моделей.

Приведем вначале некоторые известные определения [5], которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $F: R^N \rightarrow R^N$ – отображение, порождающее разностное уравнение вида

$$x(n+1) = F(x(n)), \quad x(n) = \{x_1(n), \mathbf{K}, x_N(n)\}, \quad n = 0, 1, \mathbf{K} \quad (1)$$

Рассмотрим некоторую траекторию $x(n)$, $n = 0, 1, \mathbf{K}$, системы (1).

Определение 1. Говорят, что в системе (1) имеет место режим *полной синхронизации*, если $\forall i, j \in Z_N^+ = \{1, 2, \mathbf{K}, N\}$:

$$|x_i(n) - x_j(n)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

и траектория $\{x(n)\}$ системы (1) ограничена.

Определение 2. Говорят, что в системе (1) имеет место режим *частной синхронизации*, если существует подмножество $T \subset Z_N^+$, которое имеет по крайней мере два элемента, такое, что (2) выполняется $\forall i, j \in T$ и не выполняется, если $i \in T, j \notin T$, а траектория $\{x(n)\}$ ограничена.

При полной синхронизации динамика системы (1) реализуется на диагонали $D = \{(x_1, \mathbf{K}, x_N) \mid x_i = x_j, i, j \in Z_N^+\}$ и поэтому может быть описана одномерным отображением.

Для наличия в (1) частной или полной синхронизации достаточно, чтобы в соответствующем диагональном подпространстве вида

$$\Pi_T = \{(x_1, \mathbf{K}, x_N) \mid x_i = x_j, i, j \in T\}$$

или на инвариантной диагонали D существовал аттрактор A , который называется **синхронизирующим**.

Определение 3. Полная или частная синхронизация называется **сильной**, если соответствующий синхронизирующий аттрактор асимптотически устойчив по Ляпунову, и **слабой** – если аттрактор устойчив по Милнору [12].

Рассмотрим систему двух разностных уравнений первого порядка

$$(x(n+1), y(n+1)) = F(x(n), y(n)), \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (3)$$

где $x(n), y(n) \in \mathbb{R}^1$, а отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} f(x) + e(f(y) - f(x)) \\ f(y) + e(f(x) - f(y)) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $e \in \mathbb{R}^1$ – параметр связи, а $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ – одномерное непрерывное отображение.

Определение 4. Говорят, что в системе (3) имеет место **хаотическая синхронизация**, если для отображения F существует хаотическое множество

$$A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \in A\} \subset D, \quad (5)$$

где A – хаотический аттрактор отображения f , $D = \{(x, y) \mid x = y\}$ – диагональ, область притяжения которого $B(A_D) \subset \mathbb{R}^2$ имеет положительную меру Лебега в \mathbb{R}^2 .

Определение 5. Множество $A_D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \in A\}$ устойчиво по Милнору, если его область притяжения $B(A_D)$ имеет положительную меру Лебега в \mathbb{R}^2 , и неустойчиво по Милнору – в противном случае.

Рассмотрим систему N связанных отображений

$$x_i(n+1) = f(x_i(n)) + \frac{e}{N} \sum_{j=1}^N (f(x_j(n)) - f(x_i(n))), \quad (6)$$

где $i = 1, \mathbf{K}, N$, e – параметр связи, выбранный из физических соображений, $f(x)$ – одномерное, необратимое отображение, обладающее хаотической динамикой.

Полная синхронизация системы (1), т. е. сужение движения на одномерное многообразие $D = \{(x_1, \mathbf{K}, x_N) \mid x_1 = x_2 = \mathbf{K} = x_N$ в N -мерном фазовом пространстве является простейшей нетривиальной формой динамики данной системы. При некоторых отделенных от ну

ля значениях e множество полной синхронизации может притягивать все или почти все начальные условия из некоторой своей окрестности. При других значениях параметра связи e происходит явление частной синхронизации.

Отметим, что различные виды связи соответствуют различным бифуркационным сценариям. Процесс потери хаотической синхронизации в системе линейно связанных логистических отображений, локальные и глобальные бифуркации, происходящие в системе после первой трансверсальной дестабилизации периодической траектории, принадлежащей синхронизированному хаотическому множеству, описаны в [5, 6]. При исследовании этих процессов важную роль играют поглощающая плоскость и смешанная поглощающая плоскость для двумерного отображения $F : R^2 \rightarrow R^2$ [7, 8]. Они описывают инвариантную область специального вида в фазовом пространстве, пределы которой траектории не покидают. Граница поглощающей области состоит из частей критических линий – образов кривых фазового пространства, на которых Якобиан обращается в ноль ($DF = 0$) под действием отображения F . Часть границы смешанной поглощающей области образуют также неустойчивые многообразия седловых циклов. Смешанная поглощающая плоскость инвариантна относительно F .

Целью данной работы является исследование перехода от однокластерной динамики к двух- и трехкластерной в системе трех связанных отображений вида

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathbf{a} \begin{pmatrix} f(x) + e(f(z) - f(x)) \\ f(y) + e(f(z) - f(y)) \\ f(z) + e(f(x) - f(z)) \end{pmatrix} \quad (8)$$

где $f = f_a = ax(1 - x) : R \rightarrow R$.

Задача заключается в том, чтобы найти множество параметров $\{a, e\}$, при которых хаотические переменные x, y синхронизируются между собой, а z нет, а также изучить динамику внутри синхронизируемой плоскости $\Pi_{xy} = \{(x, y, z) \mid x = y\}$.

Этот случай реализуется при выполнении следующих условий.

1. Плоскость Π_{xy} инвариантна относительно F .
2. Главная диагональ D не является устойчивой в плоскости Π_{xy} .
3. В Π_{xy} существует двумерный устойчивый по перпендикулярному к Π_{xy} направлению аттрактор (аттракторы).

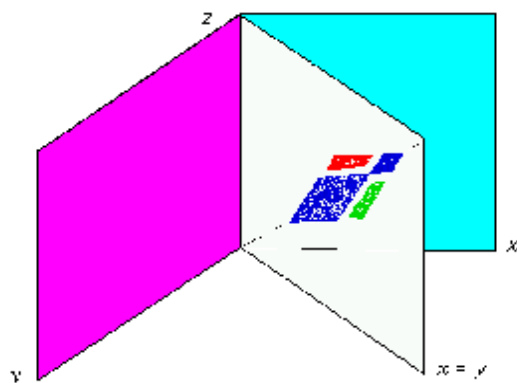


Рис. 1. Аттракторы в синхронизируемой плоскости Π_{xy} при $e = 0.98$.

На рис. 1 рассматриваются три различных трехмерных аттрактора в синхронизируемой плоскости. Для каждого из рассматриваемых аттракторов переменные x и y синхронизируются, а z нет. При этом все аттракторы по крайней мере слабо устойчивы по Милнору.

Как было сказано выше, при некоторых значениях параметров $\{a, e\}$ система (8) когерентна, т. е. траектории притягиваются к главной диагонали в трехмерном фазовом пространстве. На диагонали динамика описывается одномерным отображением $f(x)$, и показатель Ляпунова

$$I_D = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x(n))|, \quad (9)$$

где $f'(x)$ – производная от $f(x)$; $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \mathbf{K}$, – типичная траектория f .

Если динамика $f(x)$ хаотическая, то $I_D > 0$.

Рассмотрим устойчивость полностью синхронизированного движения. В точке (x, x, x) на D матрица Якоби системы (8) имеет вид:

$$DF = f'(x) \begin{pmatrix} 1-e & 0 & e \\ 0 & 1-e & e \\ e & 0 & 1-e \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матрица DF имеет собственные векторы $\mathbf{a}_D = (1, 1, 1)$ вдоль диагонали, $\mathbf{a}_{xy} = (1, 1, -1)$ в плоскости Π_{xy} , $\mathbf{a}_{xz} = (0, 1, 0)$ в плоскости Π_{xz} . Соответствующими собственными числами будут $\mathbf{n}_{xy} = f'(x)(1-2e)$, $\mathbf{n}_{xz} = f'(x)(1-e)$, а показателями Ляпунова будут

$$I_{xy} = I_D + \ln|1 - 2e|, \quad (11)$$

по направлению от диагонали в Π_{xy} , и

$$I_{xz} = I_D + \ln|1 - e|, \quad (12)$$

по направлению от диагонали в Π_{xz} .

Если $I_{xy} < 0$, то полностью синхронизированное множество слабо устойчиво в плоскости Π_{xy} . Это означает, что D притягивает множество точек положительной меры Лебега из своей двумерной окрестности в синхронизированной плоскости.

Чтобы полностью синхронизированное множество было асимптотически устойчиво, все траектории его должны быть трансверсально устойчивыми. Наряду с этим могут существовать области фазового пространства, в которых $I_{xy} < 0$, но в то же время траектории, принадлежащие синхронизированному хаотическому множеству, трансверсально неустойчивы. Переход, при котором I_{xy} меняет знак с $-$ на $+$, называется **бифуркацией расширения** (blowout bifurcation) [10].

Рассмотрим теперь явление частной синхронизации для системы (8). На плоскости Π_{xy} сужается к виду

$$F|_{\{x=y\}}: \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} f(x) + e(f(z) - f(x)) \\ f(z) + e(f(x) - f(z)) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В выражении (12) для трансверсального к Π_{xy} показателя Ляпунова заменим I_D на

$$I_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln|f'(x(n))|,$$

где через x_n , $n = 1, 2, \mathbf{K}$, обозначены первые координаты точек $\{(x(n), z(n))_{n=1}^{\infty}\}$ типичной траектории частного синхронизированного хаотического множества A в синхронизирующей плоскости Π_{xy} . Как показано на рис. 1, несколько частных синхронизированных аттракторов могут сосуществовать для одних и тех же значений $\{a, e\}$. Каждый аттрактор A_m , $m = 1, 2, \mathbf{K}$, характеризуется собственным показателем Ляпунова $I_{xz}^m = I_{xz}(A_m)$. Условием частной синхронизации хаотического множества является $I_{xz}^m < 0$ [11].

Используя изложенную методику, не представляет затруднений доказать следующие утверждения.

1. Плоскость $\Pi_{yz} = \{(x, y, z) \mid y = z\}$ не инвариантна относительно F .
2. D, Π_{xy}, Π_{xz} инвариантны относительно F .

В качестве примера покажем слабую трансверсальную устойчивость аттракторов семейств A_1 и A'_1 рождающихся вследствие трансверсальной бифуркации точки покоя при движении параметра ϵ как влево, так и вправо от значения $\epsilon = 0.5$ при фиксированном значении $a = 3.678573\mathbf{K}$. В зависимости от направления точка покоя подвергается различным бифуркациям – бифуркации “вилки” (pitchfork) и соответственно бифуркации удвоения периода. В результате численного эксперимента удалось показать трансверсальную устойчивость семейства A_1 , найти значения параметров, при которых проявляется явление хаотической синхронизации (рис. 2). В области параметров, где трансверсальный Ляпуновский показатель $I_{xz} < 0$, а $I_{1,2} > 0$ имеет место режим частной хаотической синхронизации.

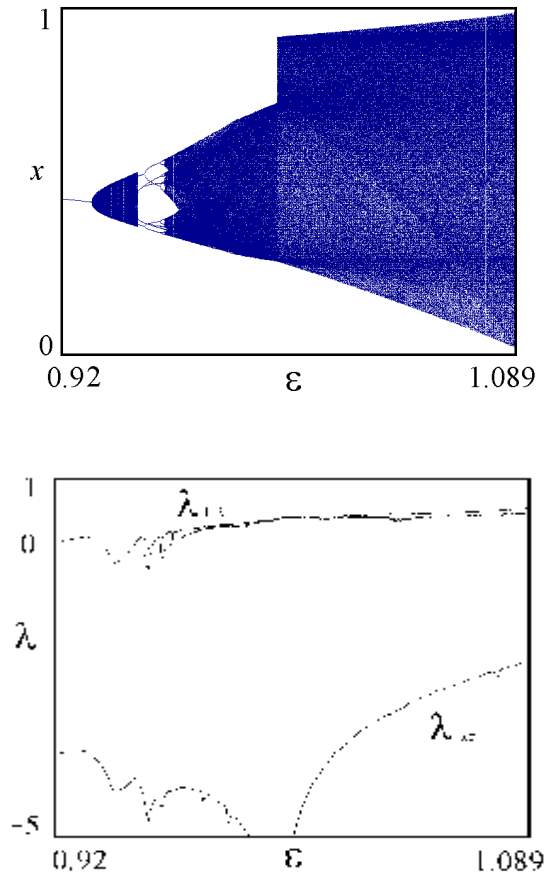


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для аттракторов и график показателей Ляпунова для семейства A_1 .

Итак, для системы (8) найдены значения a и e , при которых в синхронизируемой плоскости Π_{xy} обнаружено явление частной синхронизации, т. е. в плоскости Π_{xy} существуют трансверсально слабо устойчивые хаотические аттракторы.

Список использованной литературы

1. Hayashi H., Nakao M., and Hiraoka H. Chaos in the self-sustained oscillation of an excitable biological membrane under sinusoidal stimulation//em Phys. Lett. A. 88. – 1982. – P. 265-266.
2. Kaneko K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos//Physica D 34 (1989). – P. 1-41.
3. Kaneko K. Supertransients, spatiotemporal intermittency and stability of fully developed spatiotemporal chaos//em Phys. Lett. – 1990. – Lett. A 149. – P. 105-112.
4. Kapral R. Pattern formation in two-dimensional arrays of coupled, discrete-time oscillators// em Phys. Rev. – 1985. – A 31. – P. 3868-3889.
5. Maistrenko Yu., Maistrenko V. A. Popovych and E. Mosekilde. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps//em Phys. Rev. – 1998. – E 57. – P. 2713-2724.
6. Maistrenko Yu., Maistrenko V. A. Popovych and E. Mosekilde. Desynchronization of chaos in coupled logistic maps//Phys. Rev. E 60. – P. 2817-2830.
7. Kapitaniak T. (Ed.). Chaotic Oscillators. Theory and Applications. – World Scientific, Singapore, 1992.
8. Maistrenko Yu., Maistrenko V., Popovych A. and Mosekilde E. Role of the absorbing area in chaotic synchronization//Phys. Rev. Lett. 80. – P. 1638-1641.
9. Abraham R. H., Gardini L., Mira C. Chaos in Discrete Dynamical Systems. – Springer-Verlag, Berlin, 1997.
10. Alexander J.C., Yorke J. A., You Z., and Kan I. Riddled basins//Int. J. Bifurcation and Chaos 2. – 1992. – P. 795-813.
11. Taborov A., Maistrenko Yu., Mosekilde E. Partial synchronization in a system of coupled logistic maps//Int. J. Bifurcation and Chaos. – 2000. – 10, № 5. – P. 1051-1066.
12. Milnor J. On the concept of attractor//Commun. Math. Phys. 99, – P. 177-195.

Поступила в редколлегию 17.09.2001 г.