УДК 519.8

В.А. ТУРЧИНА, доц., А.Д. ФИРСОВ, асп., Днепропетров. нац. ун-т

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ УПОРЯДОЧЕНИЯ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

В работе исследованы частные случаи задачи многопроцессорное расписание. Доказаны необходимые и достаточные условия существования расписаний в случае трех исполнителей. Конструктивно доказаны теоремы о сложности решения задачи в конкретных случаях.

В работе рассматривается известная оптимизационная задача на ациклических орграфах, которая является формализацией таких прикладных задач как многопроцессорное расписание, оптимальное выполнение взаимосвязанных работ при ограниченном ресурсе.

Дан орграф G={V,U} и параметр h. Требуется распределить вершины графа на минимальное количество мест так, чтобы:

1) на каждом месте стояло не более h вершин;
2) если $(i,j)\in U$, то номер места на котором стоит вершина i меньше номера места, на котором стоит вершина j.

Полученное размещение вершин называется их параллельным упорядочением и обозначается S [1]. Количество занятых мест называют длиной упорядочения.

Известно, что в общей постановке задача является NP - полной. Остается открытым вопрос о существовании эффективного (имеющего полиномиальную сложность) точного алгоритма при фиксированной ширине h>2 [2].

Упорядочения, для которых $|S[i]|=h$ $(i=1,\ldots,l-1)$ называются плотными.

Выделим подкласс графов, для которых существуют плотные упорядочения ширины 3.

Рассмотрим вначале граф, все вершины которого лежат на критических путях.

Пусть V_i – подмножество вершин, таких, что, длина путей, которые ведут в каждую из них равна (i-1).

Подмножество, которому принадлежат только вершины каждого из двух соседних множеств V_i и V_{i+1} назовем множеством перехода между ними если оно не содержит пару $(i,j)\in U$.

Введем подмножество вершин K_i^j множества V_i, такое, что $|K_i^j|=k_i=\mathrm{mod}(|V_i|,h)$, i=1,…,$\underline{l}$; j=1,…, $C_{|V_i|}^{k_i}$.

Обозначим через ω_i множество непосредственных последователей вершины $i\in V_1$, тогда Ω_i^j: $|\Omega^k|_i^j=|\bigcup_{i=1}^{k} w_i|$ i=2,…,$\underline{l}$-1, - множество непосредственных последователей вершин множества K_i^j.

В случае когда h=3, k_i может принимать значения 0,1,2. Множества перехода S[j] у которых k_i=1 обозначим S^1[j]. Введем подмножество M2′ – состоящее из двух вершин принадлежащих одному из вариантов выбора $S^1\backslash K_i^j$, и M2″- подмножество из двух вершин принадлежащих другому $S^1\backslash K_i^j$. Используя введенные обозначения сформулируем теорему.

Теорема 1. *Если для множеств V_i, V_{i+1} (i=1,…,$\underline{l}$-1) графа G существует более одного варианта выбора множества перехода S^1 и выполняются условия:*

1) *$M2' \cap M2''=\varnothing$;*
2) *существует хотя бы одна вершина принадлежащая V_i не являющаяся непосредственным предшественником M2′ и M2″ ;*

то для графа G существует плотное упорядочение его вершин ширины h=3.

Доказательство.

Пусть для графа G, выполняется условие теоремы и $|K_i^j|\neq 0$, i=1,…,l (данное условие вводится с целью исключения тривиального случая).

Воспользуемся методом математической индукции.

1. Рассмотрим случай k_i=1 для каждого уровня.

Определим для уровней V_1 и V_2 множество перехода. Поставим в упорядочение на]$|V_1|$/3[место вершины множества перехода (одну вершину из V_1 и две вершины принадлежащие уровню V_2) для которых выполняется условие 1). Места с первого по]$|V_1|$/3[заполним оставшимися вершинами множества V_1, удалим эти вершины из графа.

Так как из V_2 удалены вершины отвечающие условию 1), то существует как минимум одно множество перехода между уровнями V_2 и V_3. И, следовательно, можем поставить в упорядочение на следующие]($|V_2|$-2)/3[мест вершины множества V_2 и вершины множества перехода, принадлежащие уровнюV_3 для которых выполняется условие 1). Таким образом места с первого по]$|V_1|$/3[+](|V_2|-2)/3[заполнены плотно.

Пусть плотно заполнены места с первого по]$|V_1|$/3[+](|V_2|-2)/3[+…+[+](|V_{m-1}|-2)/3[.

Покажем, что следующие]($|V_m|$-2)/3[мест могут быть заполнены плотно.

Из V_m удалены две вершины отвечающие условию 1). По условию теоремы существует еще не менее одного множество перехода между уровнями V_m и V_{m+1}. И, следовательно, можем поставить в упорядочение на]$|V_1|$/3[+]($|V_2|$-2)/3[+…+[+]($|V_{m-1}|$-2)/3[+]($|V_m|$-2)/3[место вершины множества перехода (одну вершину из V_m и две вершины принадлежащие уровнюV_{m+1}) для которых выполняется условие 1). На незаполненные места до]($|V_m|$-2)/3[ставим вершины уровня m.

Таким образом, можем заполнить все места упорядочения по три вершины, за исключением последнего (число вершин в графе не кратно трем), то есть, построить плотное упорядочение для графа G.

2. Рассмотрим случай k_i=2 для каждого уровня.

Определим для уровней V_1 и V_2 множество перехода. Поставим в упорядочение на]$|V_1|$/3[место две вершины множества перехода (одну вершину из V_1 и одну вершину принадлежащую уровню V_2) для которых выполняется условие 1) и одну вершину принадлежащую уровню 2). Места с первого по]$|V_1|$/3[заполним оставшимися вершинами множества V_1. Исключим эти вершины из графа.

Так как из V_2 удалена вершина отвечающие условию 1), то существует как минимум одно множество перехода между уровнями V_2 и V_3. Следовательно, аналогично выше, можем поставить в упорядочение на следующие]($|V_2|$-1)/3[мест вершины множества V_2 и вершину множества перехода, принадлежащюю уровню V_3. Таким образом места с первого по]$|V_1|$/3[+]($|V_2|$-1)/3[заполнены плотно.

Пусть плотно заполнены места с первого по]$|V_1|$/3[+]($|V_2|$-1)/3[+…+]($|V_{m-1}|$-1)/3[.

Покажем, что и следующие]($|V_m|$-1)/3[мест могут быть заполнены плотно.

Из V_m удалена вершина, отвечающая условию 1). По условию теоремы существует еще не менее одного множество перехода между уровнями V_m и V_{m+1}. И, следовательно, можем поставить в упорядочение на]$|V_1|$/3[+]($|V_2|$-1)/3[+…+]($|V_{m-1}|$-1)/3[+]($|V_m|$-1)/3[место две вершины множества перехода (одну вершину из V_m и одну вершину принадлежащие уровню V_{m+1}) для которых выполняется условие 1) и одну вершину принадлежащую уровню V_m для которой выполняется условие 2). На незаполненные места до]($|V_m|$-1)/3[ставим вершины уровня m.

Таким образом, можем заполнить все места упорядочения по три вершины, за исключением последнего (число вершин в графе не кратно трем), то есть, построить плотное упорядочение для графа G.

Так как в п. 1 и 2 значение m выбиралось произвольно, то при распределении вершин очередного уровня мы получим либо случай 1, либо случай 2, для которых плотность доказана.

Теорема 2. *В случае, когда граф $G=(V_1,V_2,U)$ - двудольный, перебор вершин для решения задачи $S(G,3,l)$ не превосходит $max(|V_1|,|V_2|)$.*

Доказательство.

Введем число $k=mod(|V_1|/3)$, k может принимать только три значения 0, 1, 2.

Очевидно, что условие оптимальности строящегося упорядочения будет соблюдаться, если на $]|V_1|/3[$ месте, будет стоять максимальное число вершин. В случае k=0 это условие соблюдается автоматически.

Пусть k=1, тогда $]|V_1|/3[$ место можно заполнить одной вершиной из V_1 и возможно одной или двумя вершинами, принадлежащими V_2. Для того, чтобы эти вершины могли стоять на одном месте в упорядочении, по определению, между ними не должно быть связей. Так как на $]|V_1|/3[$ место можно выбрать любые вершины, удовлетворяющие заданным условиям, то для проверки этих условий достаточно вычислить последовательно для каждой вершины $i\in V_1$ разность $|V_2|-d_i^{out}$, что и определит искомые вершины.

Пусть k=2, тогда $]|V_1|/3[$ место можно заполнить двумя вершинами из V_1 и возможно одной вершиной, принадлежащей V_2. Как и в первом случае, достаточно вычислить последовательно для каждой вершины $i\in V_2$ разность $|V_1|-d_i^{in}$, что определит искомую вершину.

Таким образом, в случае k=1 необходимо перебрать не более $|V_1|$ вершин, а в случае k=2 не более $|V_2|$ вершин. Следовательно, в общем случае необходимо перебрать не более $max(|V_1|,|V_2|)$ вершин или совершить не более $o(max(|V_1|,|V_2|))$ арифметических операций.

Определение. Трехдольным графом $G=(V_1,V_2,V_3,U)$ назовем такой граф у которого $\underline{l}=3$.

Теорема 3. *В случае, когда граф $G=(V_1,V_2,V_3,U)$ - трехдольный, перебор вершин для решения задачи $S(G,3,l)$ не превосходит n^2.*

Доказательство.

Рассмотрим двудольный подграф $G'=(V_1,V_2,U)$ графа G, у которого $V_1=\underline{S}[1]$, $V_2=\underline{S}[2]$. По теореме 1, для данного подграфа оптимальное упорядочение $S_{G'}$ можно построить за $max(|V_1|,|V_2|)$ операций. Определим вершины которые будут стоять в этом упорядочении на $]|V_1|/3[$ месте ($S_{G'}[]|V_1|/3[]$), и пометим их.

Рассмотрим двудольный подграф $G''=(V_2,V_3,U)$ графа G, $V_2=\underline{S}[2]$, $V_3=\underline{S}[3]$. По теореме 1, для данного подграфа оптимальное упорядочение $S_{G''}$ можно построить за $\max(|V_2''|,|V_3|)$ операций, где $V_2''=V_2\backslash S_{G'}[]|V_1|/3[]$. Определим вершины которые будут стоять в этом упорядочении на $]|V_2''|/3[$ месте ($S_{G''}[]|V_2''|/3[]$).

В том случае, когда $|S_{G'}[]|V_1|/3[] \cup S_{G''}[]|V_2''|/3[]|<k_{G'}+k_{G''}$, так как одна вершина не может стоять на разных местах в упорядочении, для подграфа G' выбираем другие вершины для заполнения $]|V_1|/3[$ места.

В противном случае строим искомое упорядочение S. Для этого, в подграфе G' определяем вершины, которые будут стоять на местах от 1 до $]|V_1|/3[$, в подграфе G'' определяем вершины, которые будут стоять на местах от первого до последнего в упорядочении вершин этого подграфа. Поставим в соответствие местам с 1 по $]|V_1|/3[$ упорядочения S, места с 1 по $]V_1|/3[$ упорядочения $S_{G'}$, местам с $]|V_1|/3[+1$ по последнее упорядочения S, места с первого по последнее упорядочения $S_{G''}$. Упорядочение S оптимально по построению.

Таким образом, для поиска оптимального упорядочения вершин графа G необходимо перебрать, после построения $S_{G'}[]|V_1|/3[]$, не более $\max(|V_2''|,|V_3|)$ вершин. Построение $S_{G'}[]|V_1|/3[]$ требует перебора не более $\max(|V_1|,|V_2|)$ вершин. Следовательно, всего необходимо перебрать не более $(\max(|V_1|,|V_2|))\times(\max(|V_2''|,|V_3|))$ вершин.

Пусть граф G такой, что $|V_1|=p$, $|V_2|=r$, $|V_3|=1$, $n=p+r+1$, структура графа для построения оптимального расписания требуется перебор всех вершин множества V_1 и V_2, то есть $p\times r$ вершин. Это произведение максимально в случае $p=r$. Тогда, если число вершин в графе n, то $p=r=](n-1)/2[$. А соответственно полное число вершин, которые необходимо перебрать не превосходит $(n-1)^2/4$.

Список использованной литературы

1. Бурдюк В.Я., Турчина В.А. Алгоритмы параллельного упорядочения: Учебное пособие. - Днепропетровск: ДГУ, 1985. - 84 с.
2. Павлов А.А., Литвин А.Б., Мисюра Е.Б., Павлова Л.А., Родионов В.И. Конструктивные полиномиальные алгоритмы решения индивидуальных задач из класса NP. - К.:Техніка, 1993. - 127 с.

Поступила в редколлегию 19.09.2001 г.