№	r	w	$\lvert e \rvert$	Время
1	4	2	$1{,}1\cdot10^6$	3 с
2	4	3	$1{,}8\cdot10^7$	40 с
3	4	4	$8{,}4\cdot10^6$	14 с
4	4	5	$4{,}7\cdot10^5$	4 с
5	5	2	$6{,}3\cdot10^6$	17 с
6	5	3	$4{,}2\cdot10^8$	14 мин 20с
7	5	4	$6{,}0\cdot10^6$	11 с
8	5	5	$1{,}5\cdot10^7$	1 мин 20 с
9	6	2	$2{,}2\cdot10^6$	41 с
10	6	3	$1{,}7\cdot10^7$	1 мин 05 с

№	r	w	$\lvert e \rvert$	Время
11	6	4	$3{,}8\cdot10^8$	8 мин 12 с
12	6	5	$4{,}8\cdot10^8$	32 мин 30 с
13	7	2	$1{,}7\cdot10^8$	40 с
14	7	3	$3{,}4\cdot10^7$	1 мин 15 с
15	7	4	$9{,}9\cdot10^9$	3 ч 50 мин
16	8	2	$7{,}1\cdot10^8$	41 мин 16 с
17	8	3	$9{,}1\cdot10^8$	30 мин 56 с
18	9	2	$4{,}0\cdot10^8$	27 мин 09 с
19	9	3	$3{,}0\cdot10^8$	11 мин 23 с
20	10	2	$2{,}8\cdot10^8$	46 мин

Список использованной литературы

1. Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации.- Киев: Наук. думка, 1981.- 288 с.
2. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования .- К.: Наук. думка, 1986.- 268с.
3. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Поступила в редколлегию 29.09.2001 г.

УДК 519.8

Н.К. ВАСИЛЬЕВА, канд. физ.-мат. наук, Днепропетр. нац. ун-т

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ К ИЗМЕНЕНИЯМ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА

Для непрерывной задачи оптимального разбиения множества на подмножества с фиксированными центрами при ограничениях в форме равенств и неравенств исследуется зависимость оптимальных решений от изменений допустимого множества. Строятся оценки сверху оптимума полученной задачи относительно данного оптимального решения и оптимального решения непрерывной задачи оптимального разбиения множества без ограничений.

Непрерывные задачи оптимального разбиения множества находят многочисленные практические и теоретические приложения, описанные, в частности, в [1]. Там же разработаны методы и алгоритмы решения различных вариантов указанных задач.

Как известно, изменение допустимого множества не всегда приводит к изменению оптимального решения задачи. Кроме того, иногда можно ограничиться оценкой оптимума, не решая преобразованную задачу. Результаты исследований в данном направлении для непрерывных задач оптимального разбиения множества представлены автором в настоящей работе.

Пусть W - ограниченное, измеримое по Лебегу множество из n-мерного евклидового пространства E_n. Подмножества $W_1, ..., W_N$ (среди которых могут быть и пустые) составляют разбиение множества W, если

$$\bigcup_{i=1}^{N} W_i = W, \ mes(W_i \cap W_k) = 0, i \neq k, i,k = \overline{1,N}, \tag{1}$$

где $mes(\cdot)$ – мера Лебега. Пусть $t_i = (t_i^1, \ldots, t_i^n)$ - фиксированный центр подмножества W_i, принадлежащий E_n, $i = \overline{1,N}$. Будем рассматривать непрерывную задачу оптимального разбиения множества на подмножества с фиксированными центрами при ограничениях в форме равенств и неравенств в математической постановке из [1]. Требуется найти такое разбиение $W_1, ..., W_N$, что

$$\int_{W_i} r(x)dx = b_i, i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

$$\int_{W_i} r(x)dx \leq b_i, i = \overline{p+1,N}, \tag{3}$$

и при этом функционал

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{W_i} r(x)c(x,t_i)dx \tag{4}$$

достигал бы минимального значения.

Здесь и в дальнейшем интегралы понимаются в смысле Лебега. Количество ограничений-равенств p не равно N. Функция $r(\cdot)$ – действительная, ограниченная, неотрицательная, измеримая для почти всех (п.в.) $x \in W$. Функции $c(\cdot, t_i)$ – действительные, ограниченные, неотрицательные, измеримые для п.в. $x \in W$, $i = \overline{1,N}$. Заданные действительные числа b_i, $i = \overline{1,N}$, удовлетворяют соотношениям

$$0 < b_i \leq \int_W r(x)dx, i = \overline{1,N}; \ \sum_{i=1}^{p} b_i < \int_W r(x)dx; \ \sum_{i=1}^{N} b_i > \int_W r(x)dx.$$

Обозначим через $W_{*1}, ..., W_{*N}$ оптимальное решение задачи (1)-(4) без ограничений (2), (3). Пусть $\int_{W_{*i}} r(x)dx = b_{*i}, i = \overline{1,N}$. Пусть $W_1, ..., W_N$ -

оптимальное решение задачи (1)-(4). Будем считать, что

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{W_i} r(x)c(x,t_i)dx > \sum_{i=1}^{N}\int_{W_{*i}} r(x)c(x,t_i)dx.$$

Пусть в задаче (1)-(4) изменилось количество ограничений в форме равенств и неравенств (2), (3), а также числа b_i, $i=\overline{1,N}$, т.е.

$$\int_{W_{r_s}} r(x)dx = \tilde{b}_{r_s},\ s=\overline{1,\tilde{p}}, \tag{5}$$

$$\int_{W_{r_s}} r(x)dx \le \tilde{b}_{r_s},\ s=\overline{\tilde{p}+1,N}. \tag{6}$$

Тогда возможны четыре случая . Для задачи (1), (4)-(6):

1) решение $W_1,...,W_N$ недопустимо, решение $W_{*1},...,W_{*N}$ допустимо;

2) решение $W_1,...,W_N$ недопустимо, решение $W_{*1},...,W_{*N}$ недопустимо;

3) решение $W_1,...,W_N$ допустимо, решение $W_{*1},...,W_{*N}$ допустимо;

4) решение $W_1,...,W_N$ допустимо, решение $W_{*1},...,W_{*N}$ недопустимо.

Исходя из этого, оценим сверху оптимум задачи (1), (4)-(6).

В случаях 1 и 3 оптимальным решением для задачи (1), (4)-(6) является $W_{*1},...,W_{*N}$, а потому оптимум равен $\sum_{i=1}^{N}\int_{W_{*i}} r(x)c(x,t_i)dx$.

В случае 2 можно оценить сверху оптимум задачи (1), (4)-(6) относительно $W_{*1},...,W_{*N}$ и $W_1,...,W_N$ и выбрать, как окончательную, меньшую из найденных оценок. Оценка сверху оптимума задачи (1), (4)-(6) относительно $W_{*1},...,W_{*N}$, а по аналогии и оценка сверху оптимума задачи (1), (4)-(6) относительно $W_1,...,W_N$, строится следующим образом. Обозначим через $I \subset \{1,...,N\}$ множество индексов, соответствующих таким ограничениям-равенствам (5), что $b_{*i} < \tilde{b}_i$, $i \in I$. Пусть $M \subset \{1,...,N\}$ - множество индексов, соответствующих всем ограничениям-неравенствам (6) и таким ограничениям-равенствам (5), что $b_{*m} > \tilde{b}_m$, $m \in M$. Обозначим через $J \subset \{1,...,N\}$ множество индексов, соответствующих таким ограничениям-равенствам (5) и ограничениям-неравенствам (6), что $b_{*j} > \tilde{b}_j$, $j \in J$. Пусть $K \subset \{1,...,N\}$ - множество индексов, соответствующих таким ограничениям-равенствам (5) и ограничениям-неравенствам (6), что $b_{*k} < \tilde{b}_k$, $k \in K$.

Если $\sum\limits_{i\in I}(\widetilde{b}_i - b_{*i}) + \sum\limits_{j\in J}(\widetilde{b}_j - b_{*j}) > 0$, то оценка сверху оптимума задачи (1), (4)-(6) относительно решения $W_{*1},...,W_{*N}$ равна

$$\sum_{r=1}^{N}\int_{\Omega_{*r}}\rho(x)c(x,\tau_r)dx + \sum_{i\in I}(\widetilde{b}_i - b_{*i})\cdot \underset{\substack{x\in \bigcup\limits_{r\in M} W_{*r},\\ i\in I,\, m\in M}}{vrai\sup}\,(c(x,t_i)-c(x,t_m)). \quad (7)$$

Действительно, обозначим через $\widetilde{W}$ допустимое множество задачи (1), (4)-(6). Тогда

$$\min_{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}}\sum_{r=1}^{N}\int_{\widetilde{W}_r} r(x)c(x,t_r)dx \le \min_{\substack{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}:\\ \widetilde{W}_i\supset W_{*i},i\in I,\\ \widetilde{W}_m\subset W_{*m},m\in M,\\ \widetilde{W}_s=W_{*s},s\in\{1,...,N\}\setminus(I\cup M)}}\sum_{r=1}^{N}\int_{\widetilde{W}_r} r(x)c(x,t_r)dx \le$$

$$\le \sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx + \min_{\substack{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}:\\ \widetilde{W}_i\supset W_{*i},i\in I,\\ \widetilde{W}_m\subset W_{*m},m\in M,\\ \widetilde{W}_s=W_{*s},s\in\{1,...,N\}\setminus(I\cup M)}}[\sum_{i\in I}\int_{\widetilde{W}_i\setminus W_{*i}} r(x)c(x,t_i)dx -$$

$$-\sum_{m\in M}\int_{W_{*m}\setminus\widetilde{W}_m} r(x)c(x,t_m)dx] = \{\widetilde{c}(x)=c(x,t_i),\ \text{если}\ \ x\in\widetilde{W}_i\setminus W_{*i}, i\in I,$$

$$\widetilde{\widetilde{c}}(x)=c(x,t_m),\ \text{если}\ x\in W_{*m}\setminus\widetilde{W}_m,\ m\in M\} =$$

$$= \sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx + \min_{\substack{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}:\\ \widetilde{W}_i\supset W_{*i},i\in I,\\ \widetilde{W}_m\subset W_{*m},m\in M,\\ \widetilde{W}_s=W_{*s},s\in\{1,...,N\}\setminus(I\cup M)}}[\int_{\bigcup\limits_{i\in I}\widetilde{W}_i\setminus W_{*i}} r(x)\widetilde{c}(x)dx -$$

$$-\int_{\bigcup\limits_{m\in M}W_{*m}\setminus\widetilde{W}_m} r(x)\widetilde{\widetilde{c}}(x)dx] = \{\bigcup_{i\in I}\widetilde{W}_i\setminus W_{*i} = \bigcup_{m\in M}W_{*m}\setminus\widetilde{W}_m\} = \sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx +$$

$$+\min_{\substack{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}:\\ \widetilde{W}_i\supset W_{*i},i\in I,\\ \widetilde{W}_m\subset W_{*m},m\in M,\\ \widetilde{W}_s=W_{*s},s\in\{1,...,N\}\setminus(I\cup M)}}\int_{\bigcup\limits_{m\in M}W_{*m}\setminus\widetilde{W}_m} r(x)(\widetilde{c}(x)-\widetilde{\widetilde{c}}(x))dx \le \sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx +$$

$$+\min_{\substack{(\widetilde{W}_1,...,\widetilde{W}_N)\in\widetilde{W}:\\ \widetilde{W}_i\supset W_{*i},i\in I,\\ \widetilde{W}_m\subset W_{*m},m\in M,\\ \widetilde{W}_s=W_{*s},s\in\{1,...,N\}\setminus(I\cup M)}}\cdot \underset{\substack{x\in \bigcup\limits_{r\in M} W_{*r},\\ i\in I,\, m\in M}}{vrai\sup}\,(c(x,t_i)-c(x,t_m)) =$$

$$=\sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx+\sum_{i\in I}(\tilde{b}_i-b_{*i})\cdot \underset{\substack{x\in \bigcup_{r\in M} W_{*r},\\ i\in I,\, m\in M}}{vrai\sup}(c(x,t_i)-c(x,t_m)).$$

Если $\sum_{i\in I}(\tilde{b}_i-b_{*i})+\sum_{j\in J}(\tilde{b}_j-b_{*j})=0$, то по аналогии с (7) получаем, что оценка сверху оптимума задачи (1), (4)-(6) относительно решения $W_{*1},...,W_{*N}$ равна

$$\sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx+\sum_{i\in I}(\tilde{b}_i-b_{*i})\cdot \underset{\substack{x\in \bigcup_{r\in J} W_{*r},\\ i\in I,\, j\in J}}{vrai\sup}(c(x,t_i)-c(x,t_j)). \quad (8)$$

Если $\sum_{i\in I}(\tilde{b}_i-b_{*i})+\sum_{j\in J}(\tilde{b}_j-b_{*j})<0$, то по аналогии с (7) получаем, что оценка сверху оптимума задачи (1), (4)-(6) относительно решения $W_{*1},...,W_{*N}$ равна

$$\sum_{r=1}^{N}\int_{W_{*r}} r(x)c(x,t_r)dx+\sum_{j\in J}(b_{*j}-\tilde{b}_j)\cdot \underset{\substack{x\in \bigcup_{r\in J} W_{*r},\\ k\in K,\, j\in J}}{vrai\sup}(c(x,t_k)-c(x,t_j)). \quad (9)$$

Проиллюстрируем построение предложенных оценок для ряда решенных аналитически задач оптимального разбиения.

Пример 1. Пусть $W=[0,1]\times[0,1]\subset E_2$, N=2, $r(x)\equiv 1$,
$c(x,t_1)=(x-0.25)^2+4\cdot(y-0.5)^2$, $c(x,t_2)=(x-0.75)^2+4\cdot(y-0.5)^2$.
При таких условиях минимальное значение целевого функционала в задаче (1), (4) равно 0.3542, причем $b_{*1}=b_{*2}=0.5$. Если к этой задаче добавить ограничения: $\int_{W_1} r(x)dx\le 0.25$, $\int_{W_2} r(x)dx\le 1$, то минимальное значение целевого функционала будет равно 0.3855, а его оценка сверху, найденная по формуле (9) будет равна

$$0.3542+(0.5-0.25)\cdot(((0-0.75)^2+4\cdot(0.5-0.5)^2)-((0-0.25)^2+4\cdot(0.5-0.5)^2))=$$
$$=0.3542+0.125=0.4792.$$

Пример 2. Пусть $W=[0,1]\times[0,1]\subset E_2$, N=2, $r(x)\equiv 1$,

$$c(x,t_1)=\begin{cases}2, \text{ если } x\in[0,0.5]\times[0,1]\\ 5, \text{ если } x\in[0.5,1]\times[0,1]\end{cases},$$

$$c(x,t_2)=\begin{cases}6, \text{ если } x\in[0,0.5]\times[0,1]\\ 4, \text{ если } x\in[0.5,1]\times[0,1]\end{cases}.$$

При таких условиях минимальное значение целевого функционала в задаче (1), (4) равно 3, причем $b_{*1}=b_{*2}=0.5.$ Если к этой задаче добавить ограничения: $\int\limits_{W_1} r(x)dx \le 0.25,$ $\int\limits_{W_2} r(x)dx \le 1,$ то минимальное значение целевого функционала будет равно 4, а его оценка сверху, найденная по формуле (9) будет равна

$$3+(0.5\text{-}0.25)\cdot(6\text{-}2) = 4.$$

Отметим, что оценки (7)-(9) являются точными, поскольку можно указать задачи оптимального разбиения (пример 2), на которых эти оценки сверху достигаются.

Перейдем к рассмотрению случая 4. Для оптимума задачи (1), (4)-(6) можно получить оценки сверху относительно $W_{*1},...,W_{*N}$, аналогичные (7)-(9). Далее, разбиение $\Omega_1,...,\Omega_{\mathrm{N}}$ может быть оптимальным решением задачи (1), (4)-(6), но ввиду линейности непрерывной задачи оптимального разбиения множества устойчивым оно не является. Так, если в задаче (1), (4)-(6) отсутствуют ограничения в форме равенств (5) и пересечение множества

$$\{(\bar b_1,...,\bar b_N)\in E_N : \bar b_i \le \tilde b_i, i=\overline{1,N}, \sum_{i=1}^{N}\bar b_i = \int\limits_W r(x)dx\}$$

и интервала $((b_1,...,b_N),(b_{*1},...,b_{*N}))$ не пусто, то пусть $(ab_1+(1-a)b_{*1},...,ab_N+(1-a)b_{*N})$ при $0<a<1$ - ближайшая к $(b_{*1},...,b_{*N})$ точка этого интервала, входящую в указанное пересечение. Тогда оптимальное значение целевого функционала (4) на множестве разбиений $\tilde W_1,...,\tilde W_N$, удовлетворяющих ограничениям $\int\limits_{\tilde W_i} r(x)dx = ab_i+(1-a)b_{*i}, i=\overline{1,N},$ будет меньше, чем

$$a\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{W_i} r(x)c(x,t_i)dx+(1-a)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{W_{*i}} r(x)c(x,t_i)dx. \qquad (10)$$

Итак, в случае 4 выберем, как окончательную оценку сверху оптимума задачи (1), (4)-(6), меньшее число среди оценки сверху, построенной относительно $W_{*1}, ..., W_{*N}$, и оптимального значения задачи (1)-(4) на $W_1, ..., W_N$ либо, если это возможно, оценки (10).

Полученные в работе результаты устанавливают зависимость оптимального решения рассматриваемой задачи от количества и правых частей ограничений (2), (3) и позволяют оценивать сверху оптимум преобразованной задачи разбиения (1), (4)-(6) без ее решения.

Список использованной литературы

1. Киселева Е.М. Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множества и их приложения: Автореф. дис…. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09/ Днепропетр. гос. ун-т. – Киев, 1991. – 33 с.

Поступила в редколлегию 12.04.2001