УДК 517.9:532

А.В. ЯКОВЛЕВ, Таврический нац. ун-т, асп.

# ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Доказывается существование единственного сильного решения эволюционной задачи, исследуется структура спектра и свойства собственных элементов задачи о движении твердого тела с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью.

1. **Постановка задачи.** Пусть имеется твердое тело с полостью, полностью заполненной вязкоупругой жидкостью. Область, занимаемую жидкостью, обозначим Ω, а границу области Ω -- S.

Данная механическая система является гиростатом.

Введем подвижную систему координат O $x_1$ $x_2$ $x_3$, жестко связанную с телом, ее точку отсчета совместим с центром масс.

Будем считать, что в невозмущенном состоянии система покоится, а затем начинает совершать малые движения вокруг неподвижного центра масс.

Линеаризованное уравнение момента количества движения при отсутствии движения в невозмущенном состоянии имеет вид:

$$Je + r\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{u})\,d\Omega = \vec{M}, \tag{1}$$

где $\vec{M} = \vec{M}(t)$ - момент внешних сил относительно центра масс $C$, $e = \dfrac{dv}{dt}$ - угловое ускорение тела, $\vec{u}(t,x)$ - поле относительной скорости, $J = J_s + J_f$ - тензор инерции всей системы.

Линеаризованное уравнение вязкоупругой жидкости в полости Ω при условии $\Omega_0 = 0$, имеет вид (см. например, [2]):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{r}\nabla p + JE_0(t)(\Delta\vec{u}) + f, \quad div\,\vec{u} = 0 \quad (\Omega) \tag{2}$$

$$\vec{u} = 0, \quad (S) \tag{3}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^{\,0}(x), \quad v = v^{\,0}, \tag{4}$$

где $E_0(t)\vec{v}(t,x) = \vec{v}(t,x) + \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^t \exp(-g_j(t-s))\vec{v}(s,x)\,ds,$

$n$ - кинематическая вязкость жидкости, $a_i > 0, g_i > 0\ (j = 1,...,m)$, $p$ - поле давлений жидкости, $f$ - малое поле внешних сил.

Таким образом, начально-краевая задача (1-4) описывает малые движения гиростата с полостью, заполненной вязкоупругой жидкостью.

**2. Переход к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве.** Выразим угловое ускорение $e = \dfrac{dv}{dt}$ из уравнения (1) и подставив его в уравнение (2), получим:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - r\,(J^{-1}\int_{\Omega}(\vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt})d\Omega) \times \vec{r} = -\frac{1}{r}\nabla p + JE_0(t)(\Delta \vec{u}) + f_1, \quad div\, \vec{u} = 0, \tag{5}$$

$$f_1 := f - (J^{-1}M) \times \vec{r}$$

Применив к обеим частям уравнения (5) ортопроектор $P_0$ на пространство $J_0(\Omega)$, приходим к задаче:

$$(I - B)\frac{d\vec{u}}{dt} = -n\,(A_0\vec{u} + \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^t \exp(-g_j(t-s))\vec{u}(s,x)ds) + P_0 f_1, \tag{6}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}^0$$

$$B\vec{v} := P_0(\,r\,(J^{-1}\int_{\Omega}(\vec{r} \times \frac{d\vec{u}}{dt})d\Omega) \times \vec{r}), \tag{7}$$

Оператор $A_0$ называется оператором Стокса и обладает следующими свойствами (см., например, [1]): $A_0 = A_0^*$, $A_0$ – положительно определенный с дискретным спектром с предельной точкой $l = +\infty$.

В [1] исследуются свойства оператора переноса $B : B = B^*$ – положительно определен, оператор $I - B$ – положительный, $\dim R(B) < \infty$, $(I - B)^{-1} L(J_0(\Omega))$.

**3. Существование решения эволюционной задачи.** Перейдем от уравнения (6) к дифференциальному уравнению в ортогональной сумме подпространств $\overline{H} = \oplus_{k=0}^{m} H_k$, $H_k := H = J_0(\Omega)$.

Для этого введем новые искомые функции:

$$\vec{u}_0(t) := \vec{u}(t),$$

$$\vec{u}_j(t) := (n a_j)^{1/2} \int_0^t \exp(-g_j(t-s)) A_0^{1/2} \vec{u}_0(s)ds. \tag{8}$$

Из соотношений (8) следует, что

$$\vec{u}_0(0) = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}_j}{dt}=(na_j)^{1/2}A_0^{1/2}\vec{u}_0(t)-g_j\vec{u}_j(t),\quad (j=1,...,m). \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) приводят к системе линейных дифференциальных уравнений относительно функций $\vec{u}_j(t),(j=1,...,m)$:

$$\begin{gathered}(I-B)\frac{d\vec{u}_0}{dt}+nA_0\vec{u}_0+\sum_{j=1}^{m}(na_j)^{1/2}A_0^{1/2}\vec{u}_j=f_0,\\ \frac{d\vec{u}_j}{dt}=(na_j)^{1/2}A_0^{1/2}\vec{u}_0(t)+g_j\vec{u}_j(t)=0,\quad (j=1,...,m).\end{gathered} \tag{10}$$

Матричный вид данной системы имеет вид:

$$\bar{I}\frac{du}{dt}+Au=\bar{f},\quad u(0)=u^0,$$

$$A=\begin{pmatrix} nA_0 & A_{12}\\ -A_{12}^* & A_{22}\end{pmatrix},\quad A_{12}=((na_1)^{1/2}A_0^{1/2},...,(na_m)^{1/2}A_0^{1/2}), \tag{11}$$

$$A_{22}=diag(g_kI)_{k=1}^m,\bar{I}=diag(I-B,I,...,I),\quad \bar{f}=(f_0,0,...,0).$$

**Лемма**. *Оператор* `$\bar{I}^{-1}A$ *является максимальным аккретивным.*

**Доказательство.** Введем в пространстве $\bar{H}$ новое скалярное произведение $<u,v>_{\bar{H}}=(\bar{I}u,v)_{\bar{H}}$.

Тогда для любого $u$ из $D(A)$:

$$\mathrm{Re}<\bar{I}^{-1}Au,u>=\mathrm{Re}(Au,u)=n\parallel A_0^{1/2}\vec{u}_0\parallel_{J_0(\Omega)}+\sum_{k=1}^{m}g_k\parallel\vec{u}_k\parallel_{J_0(\Omega)}^2\geq c\parallel u\parallel_{\bar{h}}^2 .$$

Аналогично можно показать и для $\overline{(I^{-1}A)}^*$. Лемма доказана.

Неоднородная задача Коши (6) эквивалентна задаче (12):

$$\frac{du}{dt}+\bar{I}^{-1}Au=I^{-1}\bar{f},\quad u(0)=u^0. \tag{12}$$

Задача (12) является задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка с максимальным аккретивным оператором.

Основываясь на результатах теории сжимающих полугрупп, приходим к выводу

**Теорема.** *Задача (12) имеет единственное сильное решение, определяемое формулой*

$$u(t)=U(t)u^0+\int_0^t U(t-s)\bar{I}^{-1}\bar{f}ds, \tag{13}$$

*при условии* $u^0\in D(A)$, *а функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируемая со значениями в* $J_0(\Omega)$.

Возвращаясь к исходной начально-краевой задаче, получим

**Теорема.** *Если в задаче (6) функция* $u^0$ *дважды непрерывно-дифференцируема,* $f(t)$ *- непрерывно-дифференцируемая со значениями в* $J_0(\Omega)$*, то задача (6) имеет единственное сильное решение.*

**4. Нормальные колебания маятника, с полостью полностью заполненной вязкоупругой жидкостью.** Рассмотрим однородную систему уравнений (10). Зададим решения системы в виде $\overline{u}(t,x) = \overline{u}(x)e^{-l_t}$. Тогда

$$\begin{gathered} nA_0\vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{m}(na_j)^{1/2}A_0^{1/2}\vec{u}_j = l(I-B)\vec{u}_0, \\ -(na_j)^{1/2}A_0^{1/2}\vec{u}_0 + g_j\vec{u}_j = l\vec{u}_j, \quad (j=1,...m). \end{gathered} \tag{14}$$

Исключая из (14) элементы $\overline{u}_j$, приходим к задаче

$$nA_0\vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{m}\frac{na_j}{g_j - l}A_0\vec{u}_0 = l(I-B)\vec{u}_{0.}$$

Применив слева оператор $(I-B)^{-1}$, получим

$$nE_0(l)(I-B)^{-1}A_0\vec{u}_0 = l\vec{u}_{0.} \tag{15}$$

Исходя из спектральной задачи (15), собственные элементы задачи совпадают с собственными элементами оператора Стокса $A_0$, собственные значения являются решениями серии характеристических уравнений:

$$E_0(l) = \frac{l}{nl_n((I-B)^{-1}A_0)}, \quad n=1,2,... \tag{16}$$

Можно показать, используя новое скалярное произведение в пространстве $J_0(\Omega) :< \overline{u},\overline{v} >= ((I-B)\overline{u},\overline{v})$, что оператор $(I-B)^{-1}A_0$ является самосопряженным, положительно определенным оператором.

Из свойств этого оператора следует, что его спектр является дискретным с предельной точкой $+\infty$.

Исследования уравнений (16) показали, что можно выделить следующие свойства спектра задачи:

1. Для любого натурального $n$ уравнение (16) имеет $m+1$ корень, из них более двух могут быть невещественными комплексно сопряженными, остальные действительные и положительные.

2.Для любого натурального $n$ существует не более 2-х вещественных корней уравнения, расположенных левее $g_1$.

3. При достаточно больших $n$ комплексно сопряженные пары отсутствуют и поэтому невещественных собственных значений не более конечного числа.

4. Собственные значения задачи (15) при всех $n$ можно разбить на $m+1$ серию, имеющую в качестве предельных точек $b_k$ – корни $E_0(l)$ и $+\infty$. При этом собственные значения $l_{nk}$, отвечающие серии с номером $k$, расположены на промежутке $(b_k, g_{k+1})$. Собственные значения $l_{n\infty}$ с предельной точкой $+\infty$ расположены на промежутке $(g_{m+1}, +\infty)$.

### Список использованной литературы


1. Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. - М.:"Наука", 1989. - 410 с.
2. Л.Д. Орлова Диссертация на соискание научной степени кандидата физ.-мат. наук. - Симферополь, - 1997.


Поступила в редколлегию 19.05.2001 г.