УДК 517.958

Е. П. БЕЛАН, канд. физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т

О ДИНАМИКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В РЕЗОНАНСНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается динамика периодических решений в трехпараметрическом семействе резонансных систем дифференциальных уравнений.

Введение. Применение приближенных по невязке центральных многообразий для исследования локальной динамики параболического уравнения на окружности с преобразованием поворота и малой диффузией [1] приводит к возрастающей по размерности последовательности полиномиальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Динамика этих резонансных систем стабилизируется с увеличением размерности систем. К указанным системам приводит исследование физических систем различной природы [2], [3]. В настоящей работе исследуется динамика периодических решений модельной резонансной системы, возникающая при указанном подходе.

1. **Сильно взаимодействующие периодические решения.** Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= z_1(i + e_1 - z_1\bar z_1 - 2z_2\bar z_2 - 2z_3\bar z_3),\\ \dot z_2 &= z_2(-i + e_2 - 2z_1\bar z_1 - z_2\bar z_2 - 2z_3\bar z_3) - \bar z_1^{\,2} z_3,\\ \dot z_3 &= z_3(i + e_3 - 2z_1\bar z_1 - 2z_2\bar z_2 - z_3\bar z_3) - z_1^2 z_2.\end{aligned} \tag{1}$$

Этой системе сопоставим систему

$$\begin{aligned}\dot r_1 &= r_1(e_1 - r_1^2 - 2r_2^2 - 2r_3^2),\\ \dot r_2 &= r_2(e_2 - 2r_1^2 - r_2^2 - 2r_3^2) - r_1^2 r_3,\\ \dot r_3 &= r_3(e_3 - 2r_1^2 - 2r_2^2 - r_3^2) - r_1^2 r_2.\end{aligned} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть* $0 < e_2 < e_1$, $e_3 < 0$. *Тогда система* (1) *имеет два различных с точностью до сдвигов по* t *периодических решения* j^1, j^2, *где*

$$j^1(t) = (e_1^{1/2} e^{it}, 0, 0), \qquad j^2(t) = (0, e_2^{1/2} e^{-it}, 0).$$

Периодическое решение j^1 *экспоненциально орбитально устойчиво. Периодическое решение* j^2 *экспоненциально орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда* $e_1 < 2e_2$.

Если $e_1 < 2e_2$, *то система* (1) *имеет два двумерных неустойчивых инвариантный тора*

$$T_2^{\pm} = \{(r_{21}e^{i(t+q_1)}, r_{22}e^{-i(t+q_2)}, \pm r_{23}e^{i(t+2q_1-q_2)}), \quad q_s \in R/2pZ, s=1,2\},$$

где $R_2(r_{21}, r_{22}, r_{23})$ *является состоянием равновесия системы* (2).

Доказательство. Линеаризуем систему (1) на периодическом решении j^2. Полученная система приводится периодическим по t преобразованием к системе с постоянными коэффициентами. Матрица коэффициентов этой системы имеет одно нулевое собственное значение, остальные собственные значения отрицательны тогда и только тогда, когда $k_2 = 2e_2 - e_1 > 0$. Следовательно, периодическое решение j^2 экспоненциально орбитально устойчиво, если и только если $2e_2 - e_1 > 0$. Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что решение j^1 экспоненциально орбитально устойчиво, если и только если

$$(e_2 - 2e_1)(e_3 - 2e_1) - e_1^2 > 0. \tag{3}$$

Очевидно, что при указанных выше условиях это неравенство выполнено.

Множество $k_2 = 0$ является бифуркационным. Смена устойчивости приводит к ветвлению из j^2 двух двумерных торов $T_2^{\pm}$, где $R_2(r_{21}, r_{22}, r_{23})$ является решением системы

$$\begin{aligned} &r_1(e_1 - r_1^2 - 2r_2^2 - 2r_3^2) = 0, \\ &r_2(e_2 - 2r_1^2 - r_2^2 - 2r_3^2) - r_1^2 r_3 = 0, \\ &r_3(e_3 - 2r_1^2 - 2r_2^2 - r_3^2) - r_1^2 r_2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Для анализа устойчивости тора T_2^+ перейдем в (1) к полярным координатам

$$z_k = r_k e^{ij_k}, \quad k = 1,2,3.$$

В полученной системе перейдем от переменных j_1, j_2, j_3 к переменным j_1, j_2, y, где $y = 2j_1 - j_2 - j_3$. В результате получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot r_1 = r_1(e_1 - r_1^{\,2} - 2r_2^{\,2} - 2r_3^{\,2}),\\
&\dot r_2 = r_2(e_2 - 2r_1^{\,2} - r_2^{\,2} - 2r_3^{\,2}) - r_1^{\,2} r_3 Cos\psi\ ,\\
&\dot r_3 = r_3(e_3 - 2r_1^{\,2} - 2r_2^{\,2} - r_3^{\,2}) - r_1^{\,2} r_2 Cos\psi\ ,\\
&\dot\psi = 2r_1^{\,2}\,\frac{r_2^{\,2} - r_3^{\,2}}{r_2 r_3}\,Sin\psi\ ,
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

к которой следует добавить уравнения $\dot\varphi_1 = 1$, $\dot\varphi_2 = -1$. Очевидно, устойчивость тора $T_2^{\,+}$ эквивалентна устойчивости стационарной точки R_2 системы уравнений (2). Перейдем к анализу устойчивости стационарной точки R_2. Несложный анализ приводит к заключению, что если $k_2 = 2e_2 - e_1 > 0$, $k_2 = O(e_1)$, то имеют место следующие равенства

$$
r_{21}^{\ 2} = \frac{k_2}{3} + \ldots,\ r_{22}^{\ 2} = e_2 - \frac{k_2}{3} + \ldots,\ r_{23} = \frac{2e_1}{3(e_3 - 2e_2)}k_2 + \ldots,
$$

где многоточие означает члены порядка $O(k_2^{\,2})$. Стационарная точка R_2 является при этих условиях седлом. Действительно, примем в качестве приближения к точке R_2 точку $\hat R_2(\hat r_1, \hat r_2, 0)$, где $\hat r_1 > 0, \hat r_2 > 0$ решение системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&e_1 - r_1^{\,2} - 2r_2^{\,2} = 0,\\
&e_2 - 2r_1^{\,2} - r_2^{\,2} = 0.
\end{aligned}
$$

Обозначим $\hat B_2$ матрицу Якоби системы (5) в точке $\hat R_2$. Справедливо равенство

$$
\hat B_2 = \begin{pmatrix}
-2\hat r_1^{\,2} & -4\hat r_1 \hat r_2 & 0\\
-4\hat r_1 \hat r_2 & -2\hat r_2^{\,2} & -2\hat r_1^{\,2}\\
0 & -2\hat r_1^{\,2} & e_3 - \dfrac{2}{3}(e_1 + e_2)
\end{pmatrix}
$$

Если $k_2 = O(e_1)$, то симметричная матрица $\hat B_2$ имеет два отрицательных собственных значения $-2e_2 + O(k_2)$, $e_3 - \dfrac{2}{3}(e_1 + e_2) + O(k_2)$ и одно положительное собственное значение $O(k_2)$. При изменении $\hat r_1, \hat r_2$ знак определителя матрицы $\hat B_2$ не меняется. Отсюда следует, что точка R_2 является седловой точкой системы (5) с одномерным неустойчивым многообразием. Полагая в системе (5) $y = p$, приходим к заключению, что T_2^- двумерный инвариантный тор системы (5). Устойчивость T_2^- и T_2^+ по характеру совпадают. Последнее завершает доказательство теоремы.

При переходе параметра e_3 через критическое значение нуль в системе (1) имеет место ветвление из нуля неустойчивого периодического решения $j^3(t) = (0,0,e_3^{1/2}e^{it})$. При пересечении точкой (e_1,e_2,e_3) бифуркационного множества $\{(e_1,e_2,e_3): 2e_3 = e_2\}$ от j^3 отходит два двумерных неустойчивых тора, а размерность неустойчивого многообразия периодического решения j^3 становится равной единице. При прохождении точкой (e_1,e_2,e_3) бифуркационного множества $\{(e_1,e_2,e_3): 2e_3 = e_1\}$ из j^3 бифурцируют два двумерных неустойчивых тора, а периодическое решение j^3 становится экспоненциально орбитально устойчивым.

Предположим, что $0 < e_3 < e_2 < 2e_3$. Тогда стационарными точками системы (2) являются $\tilde{R}^{\pm}(0,\tilde{r}_2,\pm\tilde{r}_3)$, $\tilde{r}_2 > 0, \tilde{r}_3 > 0$, где

$$\tilde{r}_2^{\,2} = \frac{2e_3 - e_2}{3}, \quad \tilde{r}_3^{\,2} = \frac{2e_2 - e_3}{3}.$$

Точки $\tilde{R}^{\pm}(0,\tilde{r}_2,\pm\tilde{r}_3)$ для системы (2) являются седлами, этим точкам отвечает неустойчивый тор системы (1)

$$\tilde{T} = \{(0, \tilde{r}_2 e^{-i(t+q_1)}, \tilde{r}_3 e^{i(t+q_2)}), \quad q_s \in R/2pZ,\ s = 1,2\}$$

2**. Смена устойчивости периодического решения.** Предположим далее, что $e_k = e_k(m)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$e_2(m) > e_1(m), \quad 2e_3(m) > e_1(m), \quad m > m_0$$

и выполнено условие (3) *при* $m > m_0$.

Тогда система (1) *имеет три различных с точностью до сдвигов по* t *экспоненциально орбитально устойчивых периодических решений* j^1, j^2, j^3.

Пусть существует $\hat{m} > m_0$ *такое, что*

$$(e_2 - 2e_1)(e_3 - 2e_1) - e_1^{\,2} = 0, \quad m = \hat{m}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dm}((e_2 - 2e_1)(e_3 - 2e_1) - e_1{}^2)|_{\hat{m}} = k_1 < 0\,. \qquad (7)$$

Существует $d_0 > 0$ такое, что если $0 < m - \hat{m} < d$, то система (1) имеет два различных с точностью до сдвигов по t экспоненциально орбитально устойчивых периодических решения j^2, j^3. Периодическое решение j^1 неустойчиво.

Теорема 2 следует из предыдущих рассуждений.

Исследуем характер смены устойчивости периодического решения j^1. Остановимся на случае $e_2 = e_3$. Тогда условие (6) принимает вид $e_1 = e_2$. Отметим, что

$$\tilde{T} = \{(0, \tilde{r}e^{-i(t+q_1)}, \tilde{r}e^{i(t+q_2)}), \quad q_s \in R/2pZ,\, s = 1{,}2\},$$

где $\tilde{r}^2 = \frac{e_2}{3}$. Размерность неустойчивого многообразия инвариантного тора $\tilde{T}$ системы (1) равна двум, если $\frac{1}{2} < \frac{e_2}{e_1} < \frac{3}{4}$.

При пересечении точкой (e_1, e_2) бифуркационного множества $\{(e_1, e_2) : \frac{e_2}{e_1} = \frac{3}{4}\}$ размерность неустойчивых многообразия тора $\tilde{T}$ становится равной единице и из $\tilde{T}$ бифурцируют инвариантные торы $\tilde{T}^{+\pm}, \tilde{T}^{-\pm}$, где

$$\tilde{T}^{\pm\pm} = \{(\tilde{r}_1^{\pm} e^{i(t+q_1)} 0, \tilde{r}_2^{\pm} e^{-i(t+q_2)}, \pm\tilde{r}_2^{\pm} e^{i(t+2q_1-q_2)}), \quad q_s \in R/2pZ,\, s = 1{,}2\}.$$

Здесь

$$\tilde{r}_1^{+} = \frac{(4e_2 - 3e_1)^{1/2}}{3}, \quad \tilde{r}_2^{+} = \frac{(3e_1 - e_2)^{1/2}}{3},$$

$$\tilde{r}_1^{-} = (4e_2 - 3e_1)^{1/2}, \quad \tilde{r}_2^{-} = (e_1 - e_2)^{1/2}.$$

Инвариантные торы $\tilde{T}^{+\pm}, \tilde{T}^{-\pm}$ системы (1) определены соответственно при $\frac{3}{4} \le \frac{e_2}{e_1} \le 3$, $\frac{3}{4} \le \frac{e_2}{e_1} \le 1$. Размерность неустойчивых многообразий торов $\tilde{T}^{+\pm}$ не меняется. Размерность неустойчивых многообразий торов $\tilde{T}^{-\pm}$ меняется с два на единицу и при малых $e_1 - e_2$ равна единице. В системе (1) при $e_1 = e_2$ имеет место бифуркация типа «вилки». Инвариантные торы $\tilde{T}^{-\pm}$ сливаются с ивариантной окружностью

$$S=\{(e_1^{1/2}e^{i(t+q)},0,0),\quad q\in R/2pZ\},$$

передавая ей свою неустойчивость. Следующая бифуркация инвариантной окружности S в окрестности бифуркационного множества $\{(e_1,e_2):e_2=3e_1\}$ имеет, очевидно, также тип “вилки “.

Легко видеть, что если $e_1=e_2=e_3$, то система (2) имеет состояния равновесия (r_1,r_2,r_3), не лежащие на координатных осях тогда и только тогда, когда $r_1(r_2^{\,2}-r_3^{\,2})=0$. Принимая во внимание проведенный выше анализ, приходим к следующему дополнению к теореме 2.

Предложение. *Пусть в системе* (1) $e_2=e_3$, $e_1<e_2<3e_1$.*Тогда система* (1) *имеет единственный двумерный инвариантный тор* $\tilde{T}$ *с неустойчивым многообразием размерности один и два двумерных инвариантный тора* $\tilde{T}^{+\pm}$ *с неустойчивыми многообразиями размерности два*.

Полученные здесь результаты соответствуют результатам из [2]. Бифуркация рождения из S инвариантных торов при $e_2\neq e_3$ качественно происходит по описанному выше сценарию. Бифуркационный анализ в этом случае опирается на метод центральных многообразий [4].

В заключении отметим, что бифуркация инвариантных торов рассматривалась в ряде работ. Полученные результаты и библиография отражены в [5]. Данная работа примыкает к работам по исследованию явления буферности в динамических системах. Литература по исследованию явления буферности приведена в [6].

Є. П. Бєлан. **Про дінаміку періодичних розв’язків в резонансній системі диференціальних рівнянь.**

Р Е З Ю М Е. Розглядається дінаміка періодичних розв’язків в трипараметричному сімействі резонансних систем диференціальних рівнянь.

E.P. Belan. **Periodical solutions dynamics in the resonance system of differential equations.**

S U M M A R Y . We are considered periodical solutions dynamics in three-parametrical resonance system of differential equations.

Список использованной литературы

1. Белан Е. П. О бифуркациях бегущих волн в сингулярно возмущенной параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. – Симферополь: Таврия, 2001. вып. 17.– С. 179 – 184.
2. Алдушин А.П., Маломед Б. А. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения// Физика горения и взрыва, 1981, – т. 17 , №1. – С. 3 – 12.
3. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах// Изв. вузов, Радиофизика, 1982, т. 25 , С. 591 – 618.
4. Kuznetzov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. – New York. Springer-Verlag, 1998. – 591 p.
5. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1991. 144 с.
6. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в генераторе Ван-дер-Поля с запаздыванием// Дифференциальные уравнения . 2002. – т. 38 , №2. – С. 165 – 176.

Поступила в редакцию 10.02.03