УДК 517.9:532

Д.О. ЦВЕТКОВ, Таврический национальный университет, Украина

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе рассматривается задача о малых движениях системы тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. Получены условия, при которых существует сильное решение начально-краевой задачи, описывающей данную гидросистему.

Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из несмешивающихся жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Область Ω_1, нижняя по отношению к действию силы тяжести, заполнена вязкой стратифицированной несжимаемой жидкостью с коэффициентом динамической вязкости $m>0$. Область Ω_2 заполнена идеальной стратифицированной несжимаемой жидкостью. При этом плотности r_1 и r_2 $(r_1 > r_2)$ соответственно вязкой и идеальной жидкости в состоянии покоя изменяются вдоль вертикальной оси.

Обозначим через $\vec{n}_i$ $(i=1,2)$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ $(i=1,2)$ и направленный вне Ω_i $(i=1,2)$. Через S_i обозначим часть стенки сосуда, граничащей с областью Ω_i $(i=1,2)$.

Представим $\Gamma=\partial\Omega_2\setminus\overline{S_2}=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 - это нижняя и верхняя граница области Ω_2 соответственно. Для Ω_1 имеем $\Gamma_1=\partial\Omega_1\setminus\overline{S_1}$. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с сосудом, таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности Γ_1.

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкостей по плотностям $r_i = r_i(x_3)$, $i=1,2$:

$$0 < N^2_{i,\min} \le N_i^2(x_3) \le N^2_{i,\max} < \infty,$$
$$N_i^2(x_3) := -g r_i'(x_3)/r_i(x_3) \quad (i=1,2).$$

Рассмотрим малые движения жидкостей, близкие к состоянию покоя. Пусть $V_i = V_i(t,\hat{x})$, $\hat{x}\in\Gamma_i$ представляют собой отклонения свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i $(i=1,2)$ по нормали $\vec{n}_i$; $p_i = p_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$ - отклонения полей давлений от равновесных; $\tilde{r}_i = \tilde{r}_i(t,x)$ - отклонения полей плотности от исходных $r_i(x_3)$ $(i=1,2)$. Обозначим через $\vec{u}_i$ $(i=1,2)$ поля скоростей в жидкостях. Тогда малые движения исходной системы жидкостей описывается решениями следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = r_1^{-1}(x_3)\left(-\nabla p_1 + m\Delta \vec{u}_1 - \tilde{r}_1 g\vec{e}_3\right) + \vec{f}, \quad div\,\vec{u}_1 = 0 \quad (в\ \Omega_1),\\
&\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} = r_2^{-1}(x_3)\left(-\nabla p_2 - \tilde{r}_2 g\vec{e}_3\right) + \vec{f}, \quad div\,\vec{u}_2 = 0 \quad (в\ \Omega_2),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial t} + \nabla r_1 \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (в\ \Omega_1), \qquad \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial t} + \nabla r_2 \cdot \vec{u}_2 = 0 \quad (в\ \Omega_2),\\
\vec{u}_1 = \vec{0} \quad (на\ S_1), \quad \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (на\ S_2),
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad (на\ \Gamma_1), \qquad \frac{\partial V_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 \quad (на\ \Gamma_2),\\
&p_2 = g r_2 V_2 \quad (на\ \Gamma_2),\\
&m\left(\frac{\partial (u_1)_k}{\partial x_3} + \frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k=1,2), \quad (на\ \Gamma_1),\\
&-p_1 + 2m\frac{\partial (u_1)_3}{\partial x_3} = -p_2 - g(r_1 - r_2)V_1 \quad (на\ \Gamma_1),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_i(0,x) = \vec{u}_i^{\,0}(x), \quad \tilde{r}_i(0,x) = \tilde{r}_i^{\,0}(x) \quad (x \in \Omega_i,\ i=1,2),\\
&V_i(0,\hat{x}) = V_i^0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma_i,\ i=1,2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Применяя метод ортогонального проектирования [1] к задаче (1) – (4), сведем исходную задачу к задаче Коши для операторного уравнения в гильбертовом пространстве:

$$\begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & K_2 \\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z_2(\Omega_1)} & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ V_1 \\ \tilde{r}_1 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mA & G_1 & L_1 & L_2 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1^* & 0 & 0 & 0 \\ -L_2^* & 0 & 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ V_1 \\ \tilde{r}_1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\vec{u}_1(0); V_1(0); \tilde{r}_1(0); v(0)\right)^t := \left(\vec{u}_1^{\,0}; V_1^0; \tilde{r}_1^{\,0}; v^0\right)^t,$$

$$(\vec{u}_1; V_1; \tilde{r}_1; v)^t \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, r_1) \oplus L_{2,\Gamma_1} \oplus Z_2(\Omega_1) \oplus H =: H_1,$$

где $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, r_1) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1, r_1) \,\middle|\, div\vec{u} = 0 \ (в\ \Omega_1),\ \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = 0 \ (на\ S_1) \right\}$,

$L_2(\Gamma_1) = L_{2,\Gamma_1} \oplus \{1_{\Gamma_1}\}$, $Z_2(\Omega_1)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(j, f)_{Z_2(\Omega_1)} := g^2 \int_{\Omega_1} \left(r_1 N_1^2\right)^{-1} j \bar{f} \, d\Omega_1$, H – гильбертовое пространство, связанное с идеальной жидкостью.

Введем следующие обозначения:

$$J := \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & K_2 \\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z_2(\Omega_1)} & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix}, P := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z_2(\Omega_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} mA & G_1 & L_1 & L_2 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1^* & 0 & 0 & 0 \\ -L_2^* & 0 & 0 & M \end{pmatrix},$$

$$y := (\vec{u}_1; V_1; \tilde{r}_1; v)^t, \qquad f := \left(\vec{f}_1; 0; 0; f_2\right)^t.$$

Теорема 1. *Если функции* $\vec{u}_i$, V_i, $\tilde{r}_i$ $(i = 1,2)$ *являются классическим решением задачи (1) – (4), тогда функция y(t) является решением задачи Коши в пространстве* H_1 *для операторного уравнения*

$$J\frac{dy}{dt} + By = f(t), \qquad y(0) = y^0. \tag{5}$$

Оператор-матрицы J и B имеют следующие свойства:

1. Оператор J является самосопряженным в H_1, *положительно определенным и ограниченным.*

2. Оператор A^{-1} *является самосопряженным в* $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1, r_1)$, *положительным и компактным.*

3. Оператор iM является самосопряженным в H и неограниченным.

4. Оператор g_1 *является сопряженным к оператору* G_1 *и неограниченным.*

5. Операторы L_1 *и* L_2 *являются ограниченными.*

Определение 1. *Сильным решением задачи Коши (5) назовем функцию y(t) такую, что* $y(t)\in D(B)$ *для любого* t *из промежутка [0,T],* $By(t)\in C([0,T];H_1)$, $y(t)\in C^1([0,T];H_1)$ *и для любого* t *из промежутка [0,T] выполнено уравнение из (5).*

Произведем в уравнении (5) замену $y(t)=e^t z(t)$. В результате получим для неизвестной функции $z(t)$ задачу Коши:

$$J\frac{dz}{dt}+(B+eP)z+(J-eP)z=e^{-t}f(t), \qquad z(0)=y^0, \tag{6}$$

где число $e>0$ выбрано таким образом, что $J-eP>>0$.

Оператор $B+eP$ не является замкнутым из-за того, что оператор g_1 неограничен в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1,r_1)$ и $D(g_1)\supset D(A)$. Таким образом, оператор $B+eP$ не является максимально аккретивным.
Введем следующие обозначения:

$$Q_1:=g_1A^{-1/2},\ Q_1^+:=A^{-1/2}G_1.$$

Лемма 1. $Q_1^+\subset Q_1^*$, $\quad Q_1^+=Q_1^*\big|_{D(G_1)}$, $\quad \overline{Q_1^+}=Q_1^*$.

Лемма 2. *Замыкание* $B_0:=\overline{B+eP}$ *оператора* $B+eP$ $(e>0)$ *есть максимально аккретивный оператор. При этом*

$$D(B_0)=\left\{(\vec{u}_1;V_1;r_1;v)^t\ |m\vec{u}_1+A^{-1/2}Q_1^*V_1\in D(A),\ v\in D(M)\right\},$$
$$B_0=T_1T_2T_1,$$

где

$$T_1:=\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_{\Gamma_1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{Z_2(\Omega_1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & I\end{pmatrix},$$

$$T_2:=\begin{pmatrix} mI_1 & Q_1^* & Q_2^* & Q_3^*\\ -Q_1 & eI_{\Gamma_1} & 0 & 0\\ -Q_2 & 0 & eI_{Z_2(\Omega_1)} & 0\\ -Q_3 & 0 & 0 & eI+M\end{pmatrix},$$

$$Q_2:=L_1^*A^{-1/2},\quad Q_3:=L_2^*A^{-1/2}.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши с замкнутым оператором

$$J\frac{dz}{dt}+B_0z+\left(J-eP\right)z=e^{-t}f(t), \quad z(0)=y^0. \tag{7}$$

Здесь оператор B_0+J-eP – максимально аккретивный. Оператор J самосопряженный, положительно определенный и ограниченный в H_1, значит, для него существует оператор J^{-1}. Преобразуем (7) к виду

$$\frac{dz}{dt}+\widetilde{B}z=e^{-t}J^{-1}f(t), \quad z(0)=y^0, \tag{8}$$

где $\widetilde{B}:=J^{-1}(B_0+J-eP)$.

Введем в H_1 эквивалентную норму по формуле

$$\left\langle x,y\right\rangle :=\left(Jx,y\right)_{H_1} \quad \forall x,y\in H_1. \tag{9}$$

Легко проверить, что оператор $-\widetilde{B}$ будет максимальным диссипативным оператором в новом скалярном произведении. Тогда согласно [2] задача Коши (8) имеет единственное сильное (по переменной t) решение на промежутке $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

$$y^0\in D(B_0), \quad f(t)\in C^1\left([0,T];H_1\right).$$

Далее можно доказать, что задача Коши (7) имеет единственное сильное решение, если

$$y^0\in D(B),\ f(t)\in C^1\left([0,T];H_1\right).$$

Отсюда задача Коши (5) имеет единственное сильное решение, если $y^0\in D(B)$, $f(t)\in C^1\left([0,T];H_1\right)$. Как следствие этого факта имеем следующую теорему.

Теорема 2. *Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное сильное решение на промежутке [0,T], если выполнены условия:*

$$1.\ \vec{u}_1^{\,0}\in D(A), \quad \vec{u}_2^{\,0}\in \vec{H}^1\left(\Omega_2,r_2\right)\cap \vec{J}_{0,S_2}\left(\Omega_2,r_2\right),$$

$$V_i^0\in H^{1/2}_{\Gamma_i},\ \ \tilde{r}_i^{\,0}\in Z_2(\Omega_i)\ \ (i=1,2),$$

$$\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2, r_2) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2, r_2) \mid div\,\vec{u} = 0\ (в\,\Omega_2),\ \vec{u}\cdot\vec{n}_2 = 0\ (на\ S_2),$$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{u}\cdot\vec{n}_2\, d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} \vec{u}\cdot\vec{n}_2\, d\Gamma_2 = 0\}.$$

$$2.\ \ \vec{f}(t) \in C^1\big([0,T];\vec{L}_2(\Omega, r)\big) \quad (\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2).$$

Автор благодарит Н.Д. Копачевского за постановку задачи, внимание к работе и полезные дискуссии.

Д.О. Цветков. **Про малі рухи частково дисипативної гідросистеми, яка складається із стратифікованих рідин.**

Р Е З Ю М Е . У даній роботі розглянуто задачу про малі рухи стратифікованих рідин, що не змішуються, щільности яких у стані рівноваги мають стійку стратифікацію. Доведено теорему існування сильного розв'язання початково-крайової задачі.

D.O. Tsvetkov. **On small motions of a partially dissipative hydrosystems consisting of stratified fluids.**

S U M M A R Y . The problem on small motions of a partially dissipative hydrosystems consisting of stratified fluids is investigated on the base of a new approach connected with application of so-called operator matrices theory with unbounded entries. The theorem on strong solvability of initial value problem is proved.

Список использованной литературы

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967.
3. T.Ya. Azizov, V. Hardt, N.D. Kopachevsky, R. Mennicken. To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. Math. Nachr., submitted.

Поступила в редколлегию 05.04.03