КОЛЕБАНИЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 62.50

С.А. ДУБОВИК, канд.техн.наук, Севастопольский Нац. техн. ун-т

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРОГНОЗА КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для многомерных стохастических систем с вырожденным коэффициентом диффузии предлагается регуляризованный алгоритм прогноза критических состояний. Получено условие его равномерной пригодности во времени.

На векторные Марковские процессы и описываемые ими многомерные системы можно смотреть как на обобщение сумм независимых случайных величин. Рассматривая проблему больших уклонений для процессов, удобно начать с более простой задачи.

Пусть $x_1, x_2, \mathbf{L}$ – последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин с математическим ожиданием и дисперсией $Mx_k = 0,\ Dx_k = 1,$ удовлетворяющих условию Крамера: существует $l > 0$ такое, что $y\,(l) = M\exp(l\,x_k) < \infty$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Требуется определить вероятность $P(S_n \ge x)$ в том случае, когда x зависит от n так, что существует $a \ge 0$ и $x = a\,n$ (а не $x = a\sqrt{n}$, как в центральной предельной теореме). Решение имеет следующий вид [1]:

$$P(S_n \ge a\,n) \sim \exp\{-n\Lambda(a)\}/\,c(a,n), \qquad (1)$$

где

$$\Lambda(a) = -\inf_l(-a\ l + \ln y\,(l)) = a\ l(a) - \ln y\,(l(a)),$$

$$c(a,n) = \sqrt{2p\ n}\ s_a\ \ l(a).$$

Определяющую роль в оценках вероятностей больших уклонений (ВБУ) играет функция уклонения $\Lambda(a)$, для которой из (1) имеем

$$\Lambda(a) = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P(S_n \ge a\ n) > 0. \qquad (2)$$

Такая грубая форма представления результатов (с точностью до логарифмической эквивалентности), указывающая на экспоненциальную скорость сходимости, но не содержащая константы $c(a,n)$, широко используется в теории больших уклонений [1, 2]. Для Марковских процессов ВБУ также будем оценивать в грубой форме

(2). Аналогом функции уклонения $\Lambda(a)$ в такой бесконечномерной задаче оказывается функционал действия [3].

Прежде чем сформулировать соответствующее утверждение, определим множество F некоторого метрического пространства X с метрикой r регулярным (относительно функции S), если нижняя грань S по замыканию F совпадает с нижней гранью этой функции по множеству внутренних точек F:

$$\inf\{S(x): x \in [F]\} = \inf\{S(x): x \in (F)\}.$$

Если $F \subset X$ - регулярное борелевское множество, то

$$\lim_{e \to 0+} e^2 \ln P(F) = -\inf\{S(x): x \in F\}. \tag{3}$$

Пусть теперь случайный процесс $\tilde{x}$ задается уравнением:

$$\dot{\tilde{x}}_t = a(\tilde{x}_t) + e\, s\,(\tilde{x}_t)\,\dot{w}_t, \tag{4}$$

и с этим процессом связан функционал

$$S(j) = S_{T_1 T_2}(j) = \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} \left|(s\,(j_t))^{-1}\left(\dot{j}_t - a(j_t)\right)\right|^2 dt. \tag{5}$$

Для того чтобы привести точный результат, сформулируем соответствующие условия относительно уравнения (4) и несколько более общего:

$$\dot{\tilde{x}}_t = \tilde{a}(\tilde{x}_t) + e\, s\,(\tilde{x}_t)\,\dot{w}_t, \tag{6}$$

где вектор переноса $\tilde{a}$ зависит регулярным образом от малого параметра.

А). Вектор-функция $a(x)$ и матричная функция $\Sigma(x) = s\,(x)\, s^T(x)$ в R^n ограничены и равномерно непрерывны.

Б). Матрица $\Sigma(x) = s\,(x)\, s^T(x)$ при любом x симметрична и равномерно невырождена.

Теорема. [3] Пусть $(\tilde{x}, \tilde{P}_x)$ – диффузионный процесс в R^n с переносом $\tilde{a}(x)$, матрицей диффузии $e^2\Sigma(x)$ и начальной точкой $\tilde{x}_0 = x$, причем $\tilde{a}(x)$ при $e \to 0$ равномерно сходится к $a(x)$, то есть $\lim\limits_{e \to 0} \tilde{a}(x) = a(x)$ и предельный вектор переноса $a(x)$ и матрица диффузии $\Sigma(x)$ удовлетворяют условиям А и Б. Пусть, далее, функционал S задается формулой (5). Тогда $e^{-2} S_{0T}(j)$ является функционалом действия для семейства процессов $(\tilde{x}, \tilde{P}_x)$ при $e \to 0$ в смысле метрики $r_{0T}(j, y) = \sup\limits_{0 \le t \le T} |j_t - y_t|$ равномерно относительно начальной точки.

Значение этой теоремы в том, что она позволяет оценивать вероятности различных событий, связанных с процессом (6). Действительно, так как, в соответствии с теоремой, (5) является нормированным функционалом действия для рассматриваемого семейства, то в силу утверждения (3) для события F имеем приближенное равенство $P(F) \cong \exp\left(-e^{-2} S_*\right)$, где $S_* = S(\hat{j}) = \inf\{S(j) : j \in F\}$. Соотношение (3) показывает, что построенная оценка является главным членом логарифмической асимптотики вероятности рассматриваемого события, связанного с процессом $\tilde{x}_t$, и вычисление этого главного члена сводится к решению вариационной задачи.

Перейдем от классической вариационной задачи (с критерием (5)) к задаче Лагранжа в форме Понтрягина (ЛП) [4] со стандартным критерием

$$r_v = r_v(T) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} v^T(t) v(t)\, dt\,. \tag{7}$$

Так, для задачи (5) обозначим $\left(s\,(j_t)\right)^{-1}\left(\dot{j}_t - a(j_t)\right) = v_t = v(t)$, что равносильно введению критерия (7) с ограничением

$$\dot{j}_t = a(j_t) + s\,(j_t) v_t\,,\;\; j_0 = x\,. \tag{8}$$

Сюда еще следует добавить условие принадлежности траектории j множеству F (событие, вероятность которого оценивается)

$$j \in F \subset C_{0t_f}\,. \tag{9}$$

Таким образом, получаем алгоритм формирования задачи ЛП (7)-(9) для оценки вероятности события F, связанного с процессом (4):

– проверяется регулярность F и, в случае ее выполнения, формируется ограничение (9);
– по стохастическому уравнению (4) (или (6)) записывается обыкновенное дифференциальное уравнение (8) с абсолютно непрерывным управлением v_t, представляющим собой вектор той же размерности, что и входной "белый шум" в системе (4);
– записывается стандартный критерий "стоимости возмущений" (7), нормированный функционал действия по терминологии А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина.

Результатом решения этой задачи является экстремаль $(\hat{v}, \hat{j}, \hat{t}_f)$, определяющая минимальное значение "стоимости" (7) $S_{v*} = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \hat{v}^T(t)\,\hat{v}(t)\,dt$, и искомую оценку $P(F) \cong \exp\left(-e^{-2}\hat{S}_{v*}\right)$.

Заметим, что все приведённые построения справедливы только в случае выполнения условия Б теоремы 1, что существенно сужает их область практического использования. Действительно, матрицы диффузии в реальных многомерных системах, а с ними и матрицы $\Sigma(x)$, как правило, вырождены. В [5] показано, что введением ещё одного малого параметра l задача регуляризуется в том смысле, что добавление шумов со сколь угодно малой интенсивностью позволяет удовлетворить условию Б на любом конечном интервале $[T_1, T_2]$. Между тем, могут представлять интерес задачи с неограниченным интервалом времени. Примером является задача о выходе фазовой точки из окрестности устойчивого состояния равновесия.

В предположении линейности уравнения (8), покажем, что в таких случаях регуляризация по l позволяет построить аппроксимации только ограниченных отрезков экстремали, примыкающих к точке выхода из D. В последующих построениях наряду с линейностью существенную роль играет квазипотенциальное представление для векторного поля (8).

Итак, пусть уравнения (8) имеют вид:

$$\dot{j}_t = \overline{A}\, j_t + \overline{G}(l) n_t, \qquad j_0 = x, \tag{10}$$

где $\overline{A}$ и $\overline{G}$ – постоянные матрицы, из которых последняя регулярным образом зависит от параметра l и так, что:

С) матрица $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}(l) = \overline{G}(l)\, \overline{G}^T(l)$ – невырождена при $l > 0$. Заметим, что $\overline{\Sigma}_0 = \overline{\Sigma}(0)$ может быть вырожденной, что и означает невыполнение условия Б для (10).

В задаче (9),(10) совершим преобразование подобия $j = Lx$, приводящее матрицу системы к нормальному виду [6]. В результате получим:

$$\dot{x}_t = Ax_t + G(l) n_t, \quad Lx \in F, \tag{11}$$

$$\text{где} \quad A = L^{-1}\overline{A}L, \quad G = L^{-1}\overline{G}, \qquad AA^T = A^T A. \tag{12}$$

Уравнению (11) соответствует невозмущенная система $\dot{x}_t = Ax_t$, векторное поле которой допускает разложение (∇ – градиент):

$$Ax = -\nabla(-(A + A^T)x, x)/4 + (A - A^T)x/2 = -\nabla U(x)/2 + l(x),$$

где $U(x) = -((A + A^T)x, x)/2$, $l(x) = (A - A^T)x/2$, причём, как легко видеть, в силу (12) $(l(x), \nabla U(x)) = -x^T(A^T + A)(A - A^T)x/2 = 0$. Это означает, что для вычисления экстремали в задаче (7),(9),(10) можно применить метод квазипотенциала ([3], теорема 4.3), который в данном случае сводится к решению уравнения

$$\dot{j}_t = \nabla_a H(j_t, \nabla U(j_t)) \qquad (13)$$

для строго выпуклой и гладкой по второму аргументу функции

$$H(x,a) = (Ax,a) + (\Sigma(l)a, a)/2, \qquad (14)$$

где $\Sigma(l) = G(l)\, G^T(l)$ (см. (11),(12)). Дифференцируя (14) и подставляя в (13), получим

$$\dot{j}_t = Aj_t + \Sigma(l)\nabla U(j_t) = Aj_t + \Sigma(l)\nabla\left(-\frac{A+A^T}{2} j_t, j_t\right).$$

Окончательно для экстремали имеем линейное однородное уравнение

$$\dot{j}_t = A_l\, j_t, \qquad (15)$$

где

$$A_l = A - \Sigma(l)(A + A^T). \qquad (16)$$

Анализ собственных чисел матриц A и A_0 позволяет ответить на вопрос о равномерной по t пригодности [7,8] регуляризации в (11). Гурвицевость A и антигурвицевость A_0 гарантируют равномерность по $t \in (0,\infty)$. Последнее условие может не выполняться даже в простейших случаях и тогда прогноз критического состояния с помощью предлагаемой регуляризации матрицы диффузии возможен лишь на конечном интервале, примыкающем к точке выхода из области D. Это означает в указанном случае невозможность долговременного прогноза, то есть вычисления экстремали (15), исходящей из состояния равновесия или из его произвольно малой окрестности.

Пример. Рассмотрим систему (10) второго порядка сразу в нормализованной форме (11) и имеющей гурвицеву матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Относительно коэффициента диффузии разберём два случая: 1) регулярный, $\Sigma = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – выполнено условие Б;

2) вырожденный, $\Sigma = \Sigma(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, для которого воспользуемся регуляризацией $\Sigma(l) = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (условие С).

В первом случае в (16) следует положить $\Sigma(l) = \Sigma = I_2$ и учесть, что $A + A^T = I_2$, после чего имеем в (15) $A_l = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Последняя матрица является антигурвицевой, имеющей собственные числа

$s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$, и это гарантирует существование экстремали, ведущей из 0 на границу ∂D окрестности состояния равновесия D. Во втором случае

$$A_l = A + 2\Sigma(l) = \begin{pmatrix} -1+2l & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \quad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_0 имеет двукратное нулевое собственное число, что свидетельствует в данном случае о неравномерной пригодности регуляризации $\Sigma(l)$ на положительной полупрямой; в этом случае возможен только кратковременный прогноз – вычисление экстремали, исходящей из точки, достаточно удалённой от 0.

С.А. Дубовик. **Про можливість прогнозу критичних станів багатомірних динамічних систем**

Р Е З Ю М Е . Для багатомірних стохастичних систем з виродженим коефіцієнтом дифузії пропонується регуляризований алгоритм прогнозу критичних станів. Отримано умову його рівномірної придатності в часі.

S. Dubovik. **About an opportunity of the forecast of critical condition multivariables of dynamic systems**

S U M M A R Y . For multivariables of stochastic systems with singular factor of diffusion offers regularized algorithm of the forecast of critical condition. The condition of its uniform suitability in time is received.

Список использованной литературы

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640с.
3. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.-М.: Наука, 1979.- 424с.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М: Наука, 1972. – 429с.
5. Дубовик С.А. Алгоритм прогноза критического состояния динамической системы // Динам. системы. –1998. – Вып.14. – С.40-44.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.–М.: Мир, 1989.–655с.
7. Бутузов В.Ф. Сингулярные возмущения. – М.: Знание, 1988. – 48с.
8. Найфэ А. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455с.

Поступила в редколлегию 17.03.03