УДК 519.85

ЄМЕЦЬ О.О. д-р физ.-мат. наук, РОМАНОВА Н.Г. ст. викладач Полт. нац. техн. ун-т.

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ВЕРШИННО РОЗТАШОВАНИХ ЕВКЛІДОВИХ КОМБІНАТОРНИХ МНОЖИНАХ

Розглядається точний комбінований метод для розв'язку лінійних комбінаторних задач оптимізації на переставних множинах. Цей метод ґрунтується на ідеях методів гілок, меж та комбінаторного відсікання. Доводиться його скінченність.

Розглянемо евклідову комбінаторну множину E $[1,2]$. Багато досліджених таких множин E має властивість збіжності з множиною вершин $vert\ conv\ E$ своєї опуклої оболонки $conv\,E$:

$$E = vert\ conv\ E. \tag{1}$$

Співвідношення (1) виконується для множин переставлень з повтореннями і без $[1 - 3]$, загальної множини переставлень $[1,2]$, множини переставлень з j-ую забороною $[3]$, множини поліпереставлень $[1,2]$, деяких множин розміщень та полірозміщень $[1,2,4]$.

Означення. Множину E назвемо вершинно розташованою, якщо вона має властивість (1).

Розглянемо задачу оптимізації з лінійною цільовою функцією, лінійними обмеженнями, а також з комбінаторним обмеженням на допустимий розв'язок, що включає умову (1). Розглянемо для визначеності випадок мінімізації. Ця задача полягає в знаходженні пари $\langle c(x^*), x^* \rangle$, де

$$c(x^*) = \min_{x \in R^m} \sum_{j=1}^{m} c_j x_j , \tag{2}$$

$$x^* = arg \min_{x \in R^m} \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \tag{3}$$

при комбінаторній умові

$$y = (x_1, ..., x_k) \in E \qquad (4)$$

та при додатковій умові

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \; i \in I_r, \qquad (5)$$

де

R^m − m-вимірний арифметичний евклідів простір;

c_j, a_{ij}, b_i – задані дійсні числа;

m, k, r – задані натуральні числа, $k \le m$;

E − задана евклідова вершинно розташована комбінаторна множина, $E \subset R^k$;

I_r – множина перших r натуральних чисел;

$\arg\min f$ − мінімаль − точка, що доставляє мінімальне значення функції f при заданих умовах.

Задачу (2) − (5) можна розв'язувати універсальним методом гілок та меж. Як відомо, недоліками цього підходу для будь-якої задачі є 1) невизначеність правил галуження (вглиб, вшир, їх комбінації); 2) складність побудови оцінок множин, що утворюються при галуженні; 3) велика, як правило, кількість обчислювальної роботи, необхідної тільки для доведення, що поточне („рекордне") значення цільової функції $c(x_{рек})$ на розв'язку $x_{рек}$ є оптимальним $(c(x_{рек}) = c(x^*))$.

З іншого боку задачу (2) − (5) можна розв'язувати відомим методом комбінаторного відсікання, запропонованим в $[5,6]$ саме для задач вигляду (2) − (5) з вершинно розташованою евклідовою комбінаторною множиною E.

При цьому підході до розв'язування задачі (2) − (5) використовується (будується та розв'язується) ряд допоміжних задач лінійного програмування. Перша з них − це задача (2), (3), (5) при умові, що отримується релаксацією вимоги (4) на опуклу оболонку E, тобто:

$$y \in conv\, E \qquad (6)$$

Зауважимо, що опуклі оболонки багатьох досліджених вершинно розташованих евклідових комбінаторних множин у вигляді систем лінійних обмежень відомі $[1 - 4]$.

Якщо, розв'язавши задачу (2), (3), (5), (6) і отримавши мінімаль $x^* = (x^*_1, ..., x^*_k, x^*_{k+1}, ..., x^*_m)$, маємо виконання умови (4) для неї, тобто

$$y^* = (x^*_1, ..., x^*_k) \in E, \tag{7}$$

то задача (2) − (5) розв'язана. Інакше будується нерівність відсікання, яка проходить через суміжні з x^* вершини. Ця нерівність за відомими правилами лінійного програмування зводиться до рівності і в цій формі додається до обмежень (5). Після цього знову розв'язується задача лінійного програмування вигляду (2), (3), (5), (6), для її мінімалі x^* перевіряється умова (7). Цей процес продовжується до тих пір поки умова (7) не виконається, (або, як вийняток, допустима область не перетвориться на одноточкову множину).

Таким чином, розв'язуючи задачі (2) − (5), в методі гілок та меж після кожного покращення „рекорду” $c(x_{рек})$ не можна стверджувати, що $x_{рек} = (x_1^{рек}, ..., x_m^{рек})$, яке дає $y_{рек} = (x_1^{рек}, ..., x_k^{рек}) \in E$, буде мінімаллю x^* задачі (2) − (5). А в методі комбінаторного відсікання для задачі (2) − (5) не можна стверджувати, що існує точка, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m)$, де $(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_k) \in E$, така, що для поточної задачі лінійного програмування екстремаль x^*, для якої не виконалась умова (7), дає таке ж значення цільової функції, як і $\tilde{x}$, тобто, що $c(\tilde{x}) = c(x^*)$.

В даній роботі пропонується для задач вигляду (2) − (5) застосовувати комбінований метод, який використовує одночасно обидва розглянутих підходи, причому в такий спосіб.

1. Розв'язується за методом комбінаторного відсікання перша допоміжна задача лінійного програмування методом, що дає вершину допустимої області (симплекс-методом, тощо). Якщо для її мінімалі виконалась умова (7), то задача (2) − (5) розв'язана. Інакше − перехід на п. 2.
2. Знаходиться поточне значення „рекорду” $x_{рек}$ та $c(x_{рек})$ методом гілок та меж (чи будь-яким іншим переборним методом).
3. Перевіряється умова:

$$c(x_{рек}) = c(x^*). \tag{8}$$

Якщо умова (8) виконалась, то задача (2) − (5) розв'язана. Екстремаллю є $x_{рек}$. Якщо − ні, то перевіряється, чи x^* не є єдиною допустимою точкою x^0 допустимої області поточної допоміжної задачі лінійного програмування. Якщо так − то задача (2) − (5) не має розв'язку. Інакше − перехід на п. 4.

4. Будується обмеження-відсікання точки x^*, ця рівність додається до системи (5). Таким чином, формується нова допоміжна задача лінійного програмування вигляду (2), (3), (5), (6) в методі комбінаторного відсікання. Шукається її розв'язок $\langle c(x^*), x^* \rangle$. Перехід на п. 2.

Доведенням того, що запропонований комбінований метод дає мінімаль задачі (2) − (5) є наступне.

Множина послідовних поточних „рекордів" $\{x^1_{рек}, x^2_{рек}, ...\}$ за методом гілок і меж має властивість:

$$c(x^t_{рек}) > c(x^{t+1}_{рек}) \geq c^*, \quad \forall\ t = 1,2,...; \tag{9}$$

де c^* − мінімальне значення цільової функції задачі (2) − (5).

Множина послідовних екстремалей $\{x^1_{екс}, x^2_{екс}, ...\}$ за методом комбінаторного відсікання має властивість:

$$c^* \geq c(x^{t+1}_{екс}) > c(x^t_{екс}), \quad \forall\ t = 1,2,.... \tag{10}$$

Якщо ж для якихось t та t $\quad c(x^{t+1}_{екс}) = c(x^{t+1}_{рек})$, то зі співвідношень (9) та (10) випливає:

$$c(x^{t+1}_{рек}) = c^* = c(x^{t+1}_{екс}).$$

Очевидно, що запропонований комбінований метод є скінченим, оскільки скінченим є обидва методи, що використовуються, а зупинка за комбінованим методом відбудеться не пізніше, ніж на останньому кроці одного з них.

Таким чином доведена теорема.

Теорема. Комбінований метод розв'язування задачі (2) − (5) є точним і скінченим.

О.А. Емец, Н.Г. Романова. **Комбинированный метод решения линейных комбинаторных задач оптимизации на вершинно расположенных евклидовых комбинаторных множествах.**

Р Е З Ю М Е. Рассматривается точный комбинированный метод для решения линейных комбинаторных задач оптимизации на перестановочных множествах.

Этот метод базируется на идеях методов ветвей и границ и комбинаторного отсечения. Доказывается его конечность.

O.O.Yemets, N.G.Romanova. **The combined method for the solution of linear combinatorial problem of optimization on the Euclidian combinatorial sets, located on the verticals.**

SUMMARY. The exact combined method for the solution of linear combinatorial problem of optimization on permutation sets. Is considered the method is based on ideas of methods of branches and borders and combinatorial cutting. In this clause is proved, that it the end.

Список использованной литературы

1. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. − Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. − 188 с.
2. Ємець О.О. Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автор. дис. ... докт. фіз.-мат. наук (01.05.01) − Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 1997. − 42 с.
3. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. − М.: Наука, 1981. − 344 с.
4. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАН України. – 1999. − №8. − С. 37-41.
5. Ємець О.О., Ємець Є.М. Відсіканння в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доповіді НАН України. − 2000. − №9. − С. 105-109.
6. Емец О.А., Емец Е.М. Отсечения в линейных частично комбинаторных задачах оптимизации на перестановках // Экономика и матем. методы. − 2001. − Т. 37, №1. − С. 118-121.

Поступила в редколлегию 23.07.03

 © В.Н. Тищенко