амплітуда котрого змінюється вздовж напрямку руху (дісперсія) на відзначення від фронта хвиль Релея в задачі Лемба, що має постійну амплітуду.

V. N. Tishchenko, Ju.A. Shevljakov. **A problem of a cylindric eradiator.**

SUMMARY. The transitional processes in an unlimited elastic medium with a cylindrical rectilinear cavity under striking excitation of the own Bio's waves are investigated. These processes are provoked by a normal axis-symmetrical loading (so called "a problem of a cylindric eradiator"), which is attached to the cavity. Comparing with an analogous problem with a flat border (Lamb's problem) for surface curvature upon processes under study is done. It's proved that Bio's waves have a front moving with a speed of Reley's waves. This front amplitude is changing in direction of mathion (dispersion). It differs from Reley's waves front in Lamb's problem which amplitude stays constant.

Список использованной литературы

1. Сейсморазведка (Справочник геофизика) /Под редакцией И.И.Гурвича, В.П.Номоконова, - М.:Недра, 1981 – 464с.
2. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bare Containing a Fluid, J. Appl. Phys., 23, 1952, pp.997-1005.
3. Новацкий В.В. Теория упругости, - М.: «Мир». 1975. – 872с.
4. Сницер А.Р. Поверхностные волны на полости в полубесконечной упругой среде.// Динамические системы. Вып.16. -2000.-с.70-80.
5. Рыжик И.М., ГрадштейнИ.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.Изд.3. Гос.изд-во техн.л-ры, М-Л.: 1951,- 465с.

Поступила в редколлегию 08.09.03

УДК 533.6.013.42

Ю. Н. КОНОНОВ, канд. физ. - мат. наук,
Е.А. ТАТАРЕНКО, Донецкий национальный университет

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ, РАЗДЕЛЕННОЙ УПРУГИМИ ИНЕРЦИОННЫМИ МЕМБРАНАМИ

Обобщены результаты работ [1-3] на случай многослойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренних поверхностях. Выведено частотное уравнение, удобное для аналитического и численного исследований для произвольных значений плотностей жидкостей. Получено условие устойчивости собственных колебаний механической системы для двухслойной жидкости и проведены численные исследования первой собственной частоты.

В диссертации [4] с позиций функционального анализа рассмотрена аналогичная задача для произвольной полости в предположении, что жидкости

расположены в порядке возрастания величин плотностей. Доказаны теоремы существования сильного решения этой начально-краевой задачи и исследована структура спектра собственных колебаний.

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из m идеальных несмешивающихся жидкостей с плотностями r_i, $(i = 1, 2, ..., m)$, заполняющих жесткий круговой цилиндр радиуса a соответственно до глубин h_i. На свободной поверхности верхней жидкости $(i = 1)$ и на поверхностях раздела многослойной жидкости равномерно натянуты гибкие инерционные мембраны с погонными усилиями T_i. Мембраны жестко закреплены по краю. Движение жидкостей и мембран будем рассматривать в системе координат $Oxyz$, расположенной так, что плоскость Oyz совпадает со свободной поверхностью верхней жидкости в невозмущенном состоянии, а ось Ox направлена вдоль оси цилиндра. Задачу будем решать в рамках линейной теории, а движения жидкостей будем считать потенциальными.

2. Построение аналитического решения задачи. Задача о собственных колебаниях рассматриваемой механической системы в поле силы тяжести может быть сформулирована в виде [3]:

$$\Delta \Phi_{\mathrm{i}} = 0, \ (i = 1, 2, ..., m), \tag{1}$$

$$\partial \Phi_{\mathrm{i}} / \partial r \big|_{r=a} = 0, \ ¶ \Phi_m / ¶ x \big|_{x=-H_{m+1}} = 0 \tag{2}$$

$$\partial \Phi_{\mathrm{i}} / \partial \mathrm{x} = \partial \mathrm{W_i} / \partial \mathrm{t}, \ ¶ \Phi_{\mathrm{i-1}} / ¶ x = ¶ \Phi_{\mathrm{i}} / ¶ x \ \ (x = -H_i) \tag{3}$$

$$k_{0i} \frac{\partial^2 \mathrm{W_i}}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2 \mathrm{W_i}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathrm{W}_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathrm{W_i}}{\partial q^2} \right] = \frac{P_i - P_{i-1}}{T_i} \ \ (x = -H_i) \tag{4}$$

$$\mathrm{W_i}\big|_{r=a} = 0, \qquad P_i = -\rho_i \left(\partial \Phi_{\mathrm{i}} / \partial t + n_x g_0 \mathrm{W_i} - \mathrm{Q_i}(t) \right). \tag{5}$$

Здесь $H_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k$, $H_1 = 0$, P_i и Φ_i – давление и потенциал скоростей i-ой жидкости; $k_{0i} = r_{0i} d_{0i} / T_i$; $\mathrm{W_i}$, r_{0i}, d_{0i} – соответственно прогиб, плотность и толщина i-ой мембраны; g_0 – ускорение свободного падения, n_x – перегрузка; $\mathrm{Q_i}(t)$ – произвольная функция времени.

Ограничиваясь первой модой по угловой координате, решение задачи (1)-(5) будем искать в виде [1-2]

$$\Phi_{\mathrm{i}} = w \cos wt \cos q \ \varphi_{\mathrm{i}}(x, r), \ \mathrm{W}_i = \sin \omega t \cos \theta \, \mathrm{w}_i(r), \tag{6}$$

где

$$\varphi_{\rm i} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_{in}\,{\rm e}^{k_n x} + B_{in}\,{\rm e}^{-k_n x}\right){\rm R}_1(k_n r) \;\; (i = 1,2,\ldots,m-1),$$

$$\varphi_{\rm m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cosh k_n (x + H_{m+1}){\rm R}_1(k_n r), \tag{7}$$

$${\rm R}_1(k_n r) = {\rm J}_1(k_n r)/{\rm J}_1(m_n),\; \mu_n = k_n a,\; J_1'(m_n) = 0,$$

$${\rm w}_{\rm i}(r) = A_i \frac{{\rm Z}_1(p_i r)}{{\rm Z}_1(p_i a)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{in}\,{\rm R}_1(k_n r),\; \frac{{\rm Z}_1(p_i r)}{{\rm Z}_1(p_i a)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{in}\,{\rm R}_1(k_n r),$$

$${\rm Z}_1(p_i r) = \begin{cases} {\rm I}_1(p_i r), & p_i^2 = g(r_i - r_{i-1})/T_i - w^2 k_{0i} > 0 \\ {\rm J}_1(\tilde{k}_i r), & \tilde{k}_i^2 = -\tilde{p}_i^2 > 0 \end{cases},$$

$$b_{in} = \frac{\int_0^a r\,{\rm Z}_1(p_i r)\,{\rm R}_1(k_n r)dr}{N_n^2\,{\rm Z}_1(p_i a)},\; N_n^2 = \int_0^a r\,{\rm R}_1^2(k_n r)dr. \tag{8}$$

Решение ${\rm w}_i(r)$ неоднородного дифференциального представляется в виде суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения [5]. Подставляя соотношения (6) – (8) в уравнения (3)-(5) и, используя ортогональность с весом r на отрезке $[0, a]$ функций Бесселя ${\rm J}_1(k_n r)$, получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных $A_{in}, B_{in}, C_{in}, A_i$:

$$k_n\left((A_{i-1n} - A_{in}){\rm e}^{-k_n H_i} - (B_{i-1n} - B_{in}){\rm e}^{k_n H_i}\right) = 0,$$

$$A_{m-1n}\,{\rm e}^{-k_n H_m} - B_{m-1n}\,{\rm e}^{k_n H_m} = A_{mn}\,{\rm sh}\,k_{mn},$$

$$k_n\left(A_{in}\,{\rm e}^{-k_n H_i} - B_{in}\,{\rm e}^{k_n H_i}\right) = A_i \beta_{in} + C_{in},\; (i = 1,\ \ldots,\ m-1),$$

$$k_n A_{mn}\,{\rm sh}\,k_{mn} = A_m b_{mn} + C_{mn}, \tag{9}$$

$$(p_i^2 + k_n^2)C_{in} = \frac{\omega^2}{T_i}\Big[(\rho_i A_{in} - \rho_{i-1}A_{i-1n}){\rm e}^{-k_n H_i} +$$

$$+ (\rho_i B_{in} - \rho_{i-1}B_{i-1n}){\rm e}^{k_n H_i}\Big],\; (i = 1,\ \ldots,\ m-1)$$

$$(p_m^2 + k_n^2)C_{mn} = \frac{\omega^2}{T_m}\left[\rho_m A_{mn}\,{\rm ch}\,\kappa_{mn} - \rho_{m-1}\left(A_{m-1n}\,{\rm e}^{-k_n H_m} + B_{m-1n}\,{\rm e}^{k_n H_m}\right)\right]. \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_i b_{in} + C_{in}) = 0 \;\; (i = 1,\ \ldots,\ m). \tag{11}$$

Решая систему (9) относительно A_{in}, B_{in} находим

$$A_{in} = e^{k_n H_i}\left(e^{\kappa_{in}}\,\tilde{a}_{in} - \tilde{a}_{i+1n}\right)\Big/\left(2\operatorname{sh}\kappa_{in}\right),\ A_{mn} = \tilde{a}_{mn}/\operatorname{sh}k_{mn}\,,$$

$$B_{in} = e^{-k_n H_i}\left(e^{-\kappa_{in}}\,\tilde{a}_{in} - \tilde{a}_{i+1n}\right)\Big/\left(2\operatorname{sh}\kappa_{in}\right)\ (i = 1, ..., m-1), \qquad (12)$$

где

$$\tilde{a}_{in} = \left(A_i b_{in} + C_{in}\right)/k_n\,,\ \kappa_{in} = k_n h_i\,.$$

Подставив соотношения (12) в (10), получим систему линейных уравнений относительно C_{in} ($C_{m+1n} = A_{m+1} = 0$):

$$b_{i-1n}C_{i-1n} + \tilde{T}_{in}C_{in} + b_{in}C_{i+1n} = -b_{i-1n}\tilde{A}_{i-1} + a_{in}\tilde{A}_i - b_{in}\tilde{A}_{i+1}\,. \qquad (13)$$

В матричной форме решение системы (13) с учетом (12) имеет вид

$$C_n = \left(D_n^{-1}T_n - E\right)\tilde{A}_n$$

или

$$\tilde{A}_n + C_n = D_n^{-1}T_n\,\tilde{A}_n\,. \qquad (14)$$

Здесь

$$C_n = \left(C_{1n},...,C_{mn}\right)',\ \tilde{A}_n = \left(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_m\right)',\ \tilde{A}_{in} = b_{in}A_i\,,$$

$$\beta_{in} = \alpha_n \frac{k_n^2}{k_n^2 + p_i^2}\begin{cases} p_i\, \mathrm{I}_1'(p_i a)/\mathrm{I}_1(p_i a) & \left(p_i^2 > 0\right) \\ \tilde{k}_i\, \mathrm{J}_1'(\tilde{k}_i a)/\mathrm{J}_1(\tilde{k}_i a) & \left(\tilde{k}_i^2 = -p_i^2 > 0\right) \end{cases}$$

$$D_n\left(\omega^2\right) = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1n} & b_{1n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & \tilde{T}_{2n} & b_{2n} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{m-2n} & \tilde{T}_{m-1n} & b_{m-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{m-1n} & \tilde{T}_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}\,,\ \alpha_n = 2a\Big/\left(\mu_n^2 - 1\right),\ T_{in} = T_i k_n\,(p_i^2 + k_n^2)/w^2\,,$$

$$a_{in} = r_{i-1}\coth k_{i-1n} + r_i \coth k_{in},\ b_{in} = r_i/\operatorname{sh}k_{in}\,,\ r_0 = 0\,,$$

T_n – диагональная матрица, состоящая из элементов T_{in}, E – единичная матрица, а коэффициенты β_{in} вычислены по формулам (8).

Подставив (11) в (14) и проведя преобразования, аналогичные [2-3], получим частотное уравнение собственных колебаний многослойной жидкости, разделенной упругими инерционными мембранами, не зависящее от коэффициента b_{in}:

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{11n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{1mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{m1n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{mmn} \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Здесь $\tilde{g}_{ijn} = a_n k_n^3 g_{ijn} / \Delta_n$, $\Delta_n = |D_n|$, g_{ijn} – элементы матрицы D_n^{-1}: $D_n^{-1} = \|g_{ijn}\|_{i,j=1}^{m} / \Delta_n$. Так как D_n является линейчатой симметричной матрицей, то и обратная матрица D_n^{-1} также будет симметричной, то есть $g_{ijn} = g_{jin}$.

Если одна из глубин заполнения $h_k = \infty$ $(b_{kn} = g_{kk+1n} = g_{k+1kn} = 0)$, то из уравнения (15) получим

$$\begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{11n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{1kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{k1n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{kkn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{k+1k+1n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{k+1mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{mk+1n} & \cdots & \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{mmn} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\tilde{g}_{ijn} = a_n k_n^3 g_{ijn},\ \Delta_{in} = |D_{in}|,\ D_{kn}^{-1} = \frac{\|g_{ijn}\|_{i,j=1}^{k}}{\Delta_{kn}},\ D_{k+1n}^{-1} = \frac{\|g_{ijn}\|_{i,j=k+1}^{m}}{\Delta_{k+1n}},$$

$$D_{kn} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1n} & b_{1n} & \cdots & 0 \\ b_{1n} & \tilde{T}_{2n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{T}_{in} \end{pmatrix},\ D_{k+1n} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{i+1n} & b_{i+1n} & \cdots & 0 \\ b_{i+1n} & \tilde{T}_{i+2n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{T}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если же все $h_i = \infty$, то из (15) следует

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{g}_{iin} = 0,\ \tilde{g}_{iin} = a_n k_n^3 / \tilde{T}_{in}.$$

Таким образом, если k-й слой жидкости имеет бесконечную глубину, то частотное уравнение (15) распадается на два независимых уравнения. Если же все $h_i = \infty$, то уравнение (15) распадается на m независимых уравнений.

При $m = 1$ и $d_{01} r_{01} = 0$ уравнение (15) совпадает с частотными уравнениями работ [3, 5].

3. Исследование вопроса об устойчивости собственных колебаний

Необходимым условием устойчивости колебаний рассматриваемой механической системы является положительность всех корней частотного уравнения (15). Для двухслойной жидкости ($m = 2$) с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях частотное уравнение (15) записывается в виде [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{11n} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{22n} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_{12n} \right)^2 = 0, \qquad (16)$$

где

$$g_{11n} = \tilde{T}_{2n},\ g_{12n} = b_{1n},\ g_{22n} = \tilde{T}_{1n}, \Delta_n = \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_{1n}^2.$$

Для приближенного анализа свободных колебаний механической системы ограничимся двумя членами ряда в уравнении (16), т.к. учет одного члена ряда не приводит к уравнению, содержащему неизвестную частоту

$$b_0 w^4 - b_1 w^2 + b_2 = 0, \qquad (17)$$

$$b_0 = (a_1 B_{22} + a_2 B_{21})(a_1 B_{12} + a_2 B_{11}) - C^2,$$

$$b_1 = (a_1 B_{22} + a_2 B_{21})(a_1 A_{12} + a_2 A_{11}) + (a_1 B_{12} + a_2 B_{11})(a_1 A_{22} + a_2 A_{21}),$$

$$b_2 = (a_1 A_{12} + a_2 A_{11})(a_1 A_{22} + a_2 A_{21}),\ A_{in} = k_n^3 T_i + g k_n (r_i - r_{i-1}),$$

$$B_{in} = k_n k_{0i} T_i + a_{in},\ C^2 = a_1 b_{12} + a_2 b_{11},\ a_n = a_n k_n^3.$$

Биквадратное уравнение (17) будет иметь положительные корни, если

$$b_i > 0,\ i = 1, 2, \qquad (18)$$

т.к. при любых параметрах системы $b_0 > 0$. Из (18) следует условие устойчивости собственных колебаний механической системы:

$$a_1 A_{22} + a_2 A_{21} > 0$$

или

$$n_x(r_1 - r_2) < \frac{a_1 k_2^3 + a_2 k_1^3}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \frac{T_2}{g_0} = R \frac{T_2}{a g_0}, \; (R \approx 17.855).$$

Полученное условие устойчивости не зависит от глубин заполнения, инерционности мембран и натяжения верхней мембраны.

Если $r_1 \le r_2$, то все корни уравнения (17) положительны и всегда существует два набора собственных частот. Если же $r_1 > r_2$, то при

$$n_x > RT_2 / [a g_0 (r_1 - r_2)]$$

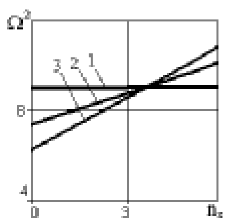

Рис.1

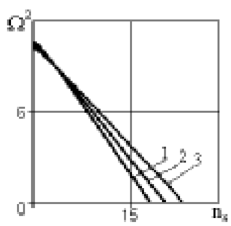

Рис.2

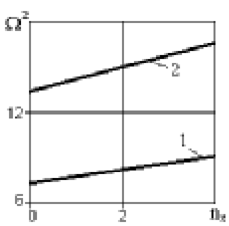

Рис.3

происходит потеря устойчивости. Таким образом, при $r_1 > r_2$, большой перегрузке и малом натяжении внутренней мембраны возможна потеря устойчивости.

Если учитывать три члена в рядах (16), получим $R = 16.707$, а при четырех – $R = 16.182$. Таким образом, с достаточной для практики точностью можно считать $R = 16.182$.

Численные исследования уравнения (16) были проведены при следующих значениях параметров: $h_1 = h_2 = 1.0$, $r_{01} d_{01} = r_{02} d_{02} = 1.0$, $a = 1.0$.На рис. 1-3 изображены графики зависимости квадрата безразмерной первой собственной частоты $\Omega^2 = w^2 a / g_0$ от перегрузки n_x. Кривые 1-3 на рис. 1 соответствуют значениям $\rho_{21} = \rho_2/\rho_1 = 1, 2, 3$, на рис. 2 –значениям $\rho_{21} = 0.1, 0.2, 0.3$. На рис. 3 кривые 1 и 2 построены с учетом инерционности мембран ($r_{01} d_{01} = r_{02} d_{02} = 1$ – кривая 1) и без учета инерционности ($r_{01} d_{01} = r_{02} d_{02} = 0$ – кривая 2) при $r_{21} = 2.0$. Численные исследования показали, что если более тяжелая жидкость находится внизу ($r_2 > r_1$) или $r_2 = r_1$, то первая собственная частота возрастает с ростом перегрузки, а при $r_2 < r_1$ она убывает до значения перегрузки $n_x = RT_2 / (g a^2)$, определенного условием устойчивости. Инерционность мембран приводит к уменьшению первой собственной частоты.

Ю. Н. Кононов, К.О. Татаренко. **Вільні коливання багатошарової рідини, яка розділена пружними інерційними мембранами.**

РЕЗЮМЕ. Узагальнено результати робіт [1-3] на випадок багатошарової рідини з пружними інерційними мембранами на вільній та внутрішній поверхнях. Виведено частотне рівняння, яке є зручним для аналітичного та чисельного досліджень для довільних значень густин рідин. Отримано умову стійкості власних коливань механічної системи для двошарової рідини і проведені чисельні дослідження першої власної частоти.

У дисертації [4] з позицій функціонального аналізу розглянута аналогічна задача для довільної порожнини в припущенні, що рідини розташовані в порядку зростання величин густин. Доведено теореми існування сильного рішення цієї початково-крайової задачі і досліджена структура спектра власних коливань.

Ju. N. Kononov, E. A. Tatarenko. **Free fluctuations of the multilayered liquid divided by elastic inertial membranes.**

SUMMARY. The results of works [1-3] on a case of a multilayered liquid with elastic inertial membranes on free and internal surfaces are generalized. The frequency equation convenient for analytical and numerical researches for any values of density of liquids is deduced. The condition of stability of own fluctuations of mechanical system for a two-layer liquid is received and numerical researches of first own frequency are carried out.

In the dissertation [4] from positions of the functional analysis the similar problem for any cavity in the assumption is considered, that liquids are located in ascending order sizes of density. Theorems of existence of the strong decision of this initially regional problem are proved and the structure of a spectrum of own fluctuations is investigated.

Список использованной литературы:

1. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П. Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами //Теорет. и прикладная механика.–1999, вып.29. с.151-163.
2. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теорет. и прикладная механика.–2001, вып.32. с.158-163.
3. Самодаев В.Е. Влияние перегрузки на частоты колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.– Томск. 1972. с.180-186.
4. Пашкова Ю.С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем – канд. диссертация… физ.-мат. наук, Симферополь, 1996. 111 с.
5. Докучаев Л.В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.

Поступила в редколлегию 11.08.03