14. Орлов И.В. Нормальные индексы и шкалы операторных пространств //Функціональний аналіз: Праці Українського математичного конгресу-2001. – 2002. – С.193-208.
15. Orlov I.V. Normal functional indices and normal duality //Methods of Functional Analysis and Topology. – 2002. – V.8, №3. – P.61-71.
16. Orlov I.V. Normal Decomposition of Operator Spaces over Locally Convex Spaces //Functional Analysis and Its Applications. – 2002. – V.36, №4. – P.318-320.
17. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
18. Орлов И.В. Теорема Хана-Банаха в индуктивных шкалах пространств //Доповіді НАН України. – 1997. – №9. – С.32-36.
19. Орлов И.В. Принципы функционального анализа в шкалах пространств: теорема Хана-Банаха //Ученые Записки Таврического нац. ун-та. Математика. Физика. – 2000. – Т.2, №9. – С.88-95.

Поступила в редколлегию 14.02.03

УДК 513

В.И.МЯГКОВ, кандидат физ.-мат. наук, Таврический нац. ун-т.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ВТОРЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ПАРЫ ВЗАИМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Найдены новые свойства пары взаимных поверхностей в трёхмерном евклидовом пространстве, доказана теорема о пропорциональности вторых квадратичных форм на таких парах поверхностей, усилены предыдущие результаты [1-3] автора.

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве дана поверхность F и выбрана точка Q. Присоединим к каждой точке M поверхности F два вектора: радиус-вектор $\overrightarrow{QM}$ и единичный вектор нормали $\vec{n}$.

Две поверхности F и F^* называются взаимными с центром взаимности в точке Q, если между этими поверхностями установлено такое взаимно однозначное точечное соответствие, при котором в соответствующих точках M и M^* радиус-вектор $\overrightarrow{QM}$ первой поверхности будет параллелен вектору нормали $\vec{n}^*$ второй поверхности и, наоборот, вектор нормали $\vec{n}$ первой поверхности будет параллелен радиус-вектору $\overrightarrow{QM}^*$ второй поверхности F^*, т.е. для поверхностей F и F^* в соответствующих точках должны выполняться два условия

$$\overrightarrow{QM} \parallel \vec{n}^{*}, \quad \overrightarrow{QM}^{*} \parallel \vec{n}. \tag{1}$$

Если поверхность F удовлетворяет условиям

$$\left(\overrightarrow{QM}, \vec{n}\right) \neq 0; \qquad [\vec{n}_u \vec{n}_v] \neq \vec{0},$$

то для F существует взаимная поверхность F^*:

$$\overrightarrow{QM}^{*} = k \cdot \frac{\vec{n}}{\left(\overrightarrow{QM}, \vec{n}\right)}, \tag{2}$$

где $k = const \neq 0$, $\left(\overrightarrow{QM}, \vec{n}\right)$ - скалярное произведение.

Переход от исходной поверхности F к взаимной F^* называется преобразованием взаимности H_Q.

Вывод формулы (2), определяющей H_Q, и описание некоторых свойств преобразования взаимности опубликованы в [1-3].

Настоящая заметка посвящена доказательству следующей теоремы:

Теорема 1. Вторые квадратичные формы на паре взаимных поверхностей пропорциональны.

Доказательство. Пусть F и F^* пара взаимных поверхностей (с центром взаимности в точке Q). Для удобства обозначим

$$\overrightarrow{QM} = \vec{r}; \quad \overrightarrow{QM}^{*} = \vec{r}^{*}. \tag{3}$$

Из (1) и (3) вытекает справедливость

$$\vec{r}^{*} = l \cdot \vec{n}; \quad \vec{n}^{*} = m \cdot \vec{r}, \tag{4}$$

где

$$l = \frac{k}{\left(\vec{r}(u,v), \vec{n}(u,v)\right)}; \quad m = \frac{1}{\left|\vec{r}(u,v)\right|}.$$

Вычислим [4] вторую квадратичную форму II^* взаимной поверхности F^*

$$II^{*} = -\left(d\vec{r}^{*}, d\vec{n}^{*}\right). \tag{5}$$

Внесём (4) в (5), получим

$$II^{*}=-\left(\left(dl\cdot\vec{n}+l\cdot d\vec{n}\right),\left(dm\cdot\vec{r}+m\cdot d\vec{r}\right)\right)=$$
$$=-dl\cdot dm\left(\vec{n},\vec{r}\right)-l\cdot dm\left(\vec{r},d\vec{n}\right)-l\cdot m\left(d\vec{r},d\vec{n}\right). \qquad (6)$$

Рассмотрим в (6) только первые два слагаемые

$$S=-dm\left(dl\cdot\left(\vec{n},\vec{r}\right)+l\left(\vec{r},d\vec{n}\right)\right)=$$
$$=-dm\cdot\left(\vec{r},\left(dl\cdot\vec{n}+l\cdot d\vec{n}\right)\right)=-dm\cdot\left(\vec{r},d\left(l\cdot\vec{n}\right)\right). \qquad (7)$$

Внесём (4) в (7). Получим

$$S=-dm\cdot\left(\frac{1}{m}\cdot\vec{n}^{*},d\vec{r}^{*}\right)=\frac{-dm}{m}\cdot\left(\vec{n}^{*},d\vec{r}^{*}\right)=0. \qquad (8)$$

С учётом (8) равенство (6) примет такой окончательный вид

$$II^{*}=-l\cdot m\cdot\left(d\vec{r},d\vec{n}\right), \qquad (9)$$

то есть $II^{*}=l\cdot m\cdot II$.

Теорема 1 о пропорциональности вторых квадратичных форм доказана.

Из (9) вытекает справедливость ещё трёх теорем.

Теорема 2. Асимптотические линии на F под действием преобразования взаимности H_Q переходят в асимптотические линии на взаимной поверхности F^{*}.

Доказательство. Пары соответствующих точек M и M^{*} на взаимных поверхностях имеют совпадающие координаты, т.е. если (u,v) - криволинейные координаты точки $M\in F$, то эта же пара чисел (u,v) является криволинейными координатами точки M^{*} на взаимной поверхности F^{*}.

Допустим, что кривая $g:\begin{cases}u=u(t),\\ v=v(t)\end{cases}$ является асимптотической на поверхности F. Тогда вдоль γ вторая квадратичная форма поверхности F обращается в тождественный ноль

$$II/_{g}=(L(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^{2}+2M(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t)+$$
$$+N(u(t),v(t))\cdot(v'(t))^{2})\cdot(dt)^{2}=0. \qquad (10)$$

Под действием преобразования взаимности H_Q асимптотическая γ, лежащая на поверхности F, перейдет в кривую γ^{*}, лежащую на взаимной поверхности F^*. Вычислим значение второй квадратичной формы II* поверхности F^* вдоль кривой γ^*:

$$II^* \big/_{g^*} = (L^*(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^2 + 2M^*(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t)$$
$$+N^*(u(t),v(t))\cdot(v'(t))^2)\cdot(dt)^2 = l\cdot m\cdot(L(u(t),v(t))\cdot(u'(t))^2$$
$$+2M(u(t),v(t))\cdot u'(t)\cdot v'(t)+N(u(t),v(t))\cdot(v'(t))^2)\cdot(dt)^2 =$$
$$= l\cdot m\cdot II\big/_{g} = 0.$$

Для вычисления $II^*\big/_{g^*}$ мы воспользовались фактом (9) пропорциональности коэффициентов вторых квадратичных форм и равенством (10). Из обращения в нуль второй квадратичной формы II^* вдоль кривой γ^* вытекает: γ^* - асимптотическая на взаимной поверхности F^*. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Знаки гауссовых кривизн пары взаимных поверхностей в соответствующих точках совпадают.

Доказательство методом от противного. Допустим, что существует такая пара соответствующих точек M и M^*, в которых

$$\mathrm{K}(M)<0, \qquad \mathrm{K}(M^*)>0, \tag{11}$$

тогда в точке M существует [4] действительное асимптотическое направление *du:dv*. По Теореме 2 точно такое же направление *du:dv* обязано быть асимптотическим и в точке M^*, но в точке M^* (с положительной гауссовой кривизной) действительных асимптотических направлений нет [4]. Полученное противоречие означает ошибочность исходного допущения (11). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Сопряжённая сеть на F под действием преобразования взаимности H_Q переходит в сопряжённую сеть на взаимной поверхности F^*.

Доказательство. Пусть направления

$$d\bar{r} = \bar{r}_u\cdot du + \bar{r}_v\cdot dv, \qquad d\bar{r} = \bar{r}_u\cdot d u + \bar{r}_v\cdot d v \tag{12}$$

являются взаимно сопряженными в точке M поверхности F, тогда

$$A \equiv Ldud u + M(dud v + d u dv) + N d v d v = 0. \tag{13}$$

Направлениям (12) поверхности F на взаимной поверхности F^* будут соответствовать такие направления:

$$d\bar{r}^* = \bar{r}_u^* \cdot du + \bar{r}_v^* \cdot dv, \qquad d\bar{r}^* = \bar{r}_u^* \cdot d u + \bar{r}_v^* \cdot d v. \tag{14}$$

Для направлений (14) вычислим A^*. Воспользуемся для этого (13) и фактом (9) пропорциональности коэффициентов вторых квадратичных форм.

$$\begin{aligned} A^* &\equiv L^* du d u + M^*(du d v + d u dv) + N^* dv d v = \\ &= lm \cdot (L du d u + M(du d v + d u dv) + N dv d v) = lm \cdot A = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Полученный результат (15) означает, что если (12) были взаимно сопряженными направлениями на F, то и соответствующие им направления (14) на взаимной поверхности F^* тоже будут взаимно сопряженными. Теорема 4 доказана.

В.І. Мягков. **Пропорціональність других квадратичних форм пари взаємних поверхонь.**

Р Е З Ю М Е . Знайдені нові властивості пари взаємних поверхонь у трьохвимірному Евклідовому просторі. Доведена теорема про пропорційність других квадратичних форм на таких парах поверхонь, посилені попередні результати [1-3] автора.

V. I. Myagkov. **The proportionality of the two second quadratic forms of the conjugated pears of surfaces.**

S U M M A R Y . New properties of the conjugated pears of surfaces in 3d Euclidean space have been found. The theorem of the proportionality of the two second quadratic forms on such surfaces is proven; there by the previous results [1-3] are enforced.

Список использованной литературы.

1. Мягков В.И., Таранина Е.И. Характеристическое свойство действительных нераспадающихся кривых второго порядка. // Симферополь. – 1989. – 16 с., Библиогр. 10 назв. Рукопись депонир. в УКР. НИИНТИ 19.02.90, N 248-УК 90.
2. Мягков В.И. Об одном свойстве пары взаимных поверхностей. // Учёные записки Симферопольского государственного университета, 1997. – N 4 (43). С. 10-12.
3. Мягков В.И. О некоторых свойствах преобразования взаимности. // 4-я Международная конференция по геометрии и топологии. Тезисы докладов: Черкассы. - 2001. – С. 70-71.
4. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – Москва. – 1956. – 420 С.

Поступила в редколлегию 22.05.03