Список использованной литературы

1. Белан Е. П. О бифуркациях бегущих волн в сингулярно возмущенной параболической задаче с преобразованным аргументом // Динамические системы. – Симферополь: Таврия, 2001. вып. 17.– С. 179 – 184.
2. Алдушин А.П., Маломед Б. А. Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения// Физика горения и взрыва, 1981, – т. 17 , №1. – С. 3 – 12.
3. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах// Изв. вузов, Радиофизика, 1982, т. 25 , С. 591 – 618.
4. Kuznetzov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. – New York. Springer-Verlag, 1998. – 591 p.
5. Бибиков Ю.Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та. 1991. 144 с.
6. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в генераторе Ван-дер-Поля с запаздыванием// Дифференциальные уравнения . 2002. – т. 38 , №2. – С. 165 – 176.

Поступила в редакцию 10.02.03

УДК 517.36

С. К. ПЕРСИДСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, Таврический Нац. ун-т

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С помощью функций Ляпунова впервые получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости некоторых нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений.

В работе для одного класса нелинейных систем дифференциальных и разностных уравнений получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в целом и экспоненциальной неустойчивости. Исследуется экспоненциальная устойчивость возмущенных систем с нелинейным первым приближением.

Заметим, что проблема экспоненциальной устойчивости нелинейных систем связана с работой Л. Груйича [1], в которой приведены достаточные условия экспоненциальной устойчивости в целом одной нелинейной сложной системы с нелинейными изолированными подсистемами, которые предполагаются либо экспоненциально устойчивыми, либо экспоненциально неустойчивыми.

1. Об экспоненциальной устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений

Пусть $K(a_1,...,a_n)$: $x_s a_s \ge 0$, где $s=1,...,n$, выпуклый конус пространства R^n, $a_1,...,a_n$- параметры конуса [2]. Например, положительный октант K_n^+ пространства R^n имеет параметры, равные единице.

Определение 1. *Матрицу P размерности $n \times n$ будем называть квазипозитивной, если элементы P_{sk} матрицы P и параметры некоторого конуса $K(a_1,...,a_n)$ связаны соотношениями*

$$p_{sk}a_s a_k \ge 0 \text{ при } s \ne k \text{, где } s=1,...,n;\ k=1,...,n. \tag{1.1}$$

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P

$$x' = Pj(x), \tag{1.2}$$

$j(x) = col(j_1(x_1),...,j_n(x_n))$, где $j_s(x_s)$- непрерывные функции, удовлетворяющие неравенствам

$$j_s(x_s)x_s > 0 \text{ при } x_s \ne 0,\ s=1,...,n \tag{1.3}$$

Теорема 1.1. *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений **(1.2)** удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции $j_s(x_s)$ удовлетворяют соотношению **(1.3)** и неравенствам*

$$k_1|x_s| \le |j_s(x_s)| \le k_2|x_s|,\ (s=1,...,n), \tag{1.4}$$

где $k_2 > k_1$- некоторые положительные числа.

Тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости этой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни «характеристического» уравнения

$$\det(P - lE) = 0 \tag{1.5}$$

имели отрицательные вещественные части.

Необходимость. Пусть система (1.2) экспоненциально устойчива при любых непрерывных функциях $j_s(x_s)$, удовлетворяющих условиям (1.1) и (1.3); в частности, она экспоненциально устойчива при $j_s(x_s) = x_s$ $(s=1,...,n)$, но тогда все корни характеристического уравнения (1.5) должны иметь отрицательные вещественные части.

Достаточность. В рассматриваемом случае все корни характеристического уравнения (1.5) лежат в левой полуплоскости. В силу этого все определяемые из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} p_{sk}b_k a_k + p_{ss}b_s = -a_s,\ (s=1,...,n) \tag{1.6}$$

числа $b_1,...,b_n$ будут положительные [2].

Умножая правые части этой системы на соответствующие параметры $a_1,...,a_n$ конуса $K(a_1,...,a_n)$, получим систему

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{sk}| b_k + p_{ss}b_s = -1,\ (s=1,...,n) \tag{1.7}$$

Положим $v(x_1,...,x_n) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s| = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s sign x_s$. Тогда v' в силу системы (1.2) приводится к виду

$$v'_{(1.2)} \le \sum_{s=1}^{n} (\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n} |p_{ks}| b_k + p_{ss}b_s) |j_s(x_s)| = -\sum_{s=1}^{n} |j_s(x_s)|$$

Согласно (1.4) окончательно получаем неравенства

$$d_1\|x\| \le v(x) \le d_2\|x\|,\ \ v'_{(1.2)} \le -k_1\|x\| \le -\frac{k_1}{d_2} v(x) \tag{1.8}$$

где $d_1 = \min_s\{b_s\}$, $d_2 = \max_s\{b_s\}$ и $\|x\| = \sum_{s=1}^{n} |x_s|$.

Следовательно, на решениях системы (1.2) выполнены неравенства

$$\|x(t)\| \le \frac{d_2}{d_1} \|x(t_0)\| \exp(-\frac{k_1}{d_2}(t-t_0)). \tag{1.9}$$

Что и доказывает теорему.

Заметим, что система вида (1.2) впервые была рассмотрена Е. А. Барбашиным [3].

Рассмотрим далее нелинейную систему дифференциальных уравнений с квазипозитивной матрицей P, рассмотренную в нашей работе [4]

$$x' = Pj(x) + R(j(x)), \tag{1.10}$$

где вектор-функция $R(j(x))$ удовлетворяет соотношению

$$\|R(j)\| = o(\|j\|) \text{ при } \|j\| \to 0 \tag{1.11}$$

Соответствующую систему вида (1.2), содержащуюся в (1.10), будем называть «нелинейным первым приближением» системы (1.10).

Теорема 1.2. *Пусть непрерывные функции* $j_s(x_s)$ *удовлетворяют соотношениям* **(1.3)** *и неравенствам* **(1.4)**. *Тогда для экспоненциальной устойчивости решения системы* **(1.10)** *в некоторой* *достаточно малой окрестности начала координат необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.5) имели отрицательные вещественные части.*

Достаточность. При $j_s(x_s) = x_s$ $(s = 1, 2, ..., n)$ нелинейная возмущенная система (1.10) переходит в линейную возмущенную систему Ляпунова вида

$$x' = Px + R(x), \text{ где } \|R(j)\| = o(\|j\|) \text{ при } \|x\| \to 0.$$

Отсюда следует выполнение необходимых условий теоремы.

Для доказательства достаточности определим числа $b_1, ..., b_n$ из соответствующей системы (1.7) и положим $v(x) = \sum_{s=1}^{n} b_s |x_s|$. Эта функция будет удовлетворять неравенству

$$d_1\|x\| \le v(x) \le d_2\|x\|,$$

где $d_1 > 0, d_2 > 0$. В силу системы (1.10) полная производная функции $v(x)$ будет удовлетворять неравенству

$$v'_{(1.10)} \le -\frac{k_1}{2}\|x\| - \left(\frac{k_1}{2}\|x\| - d_2\|R(x)\|\right).$$

Из последнего неравенства следует, что в достаточно малой окрестности начала координат $\|x\| < d$, где $d > 0$ - достаточно малое число, решения системы (1.10) будут удовлетворять неравенству вида

$$\|x(t)\| \le \frac{d_2}{d_1}\|x(t_0)\|\exp\left(-\frac{k_1}{2d_1}(t - t_0)\right),$$

что завершает доказательство теоремы.

Пусть дана система дифференциальных уравнений (1.2) с квазипозитивной матрицей P, причем все функции $j_s(x_s)$ удовлетворяют неравенствам (1.3). Тогда, нетрудно видеть [2], что соответствующий конус $K(a_1, ..., a_n)$ будет для системы (1.2) замкнутым сектором. Отсюда легко получить следующую теорему об экспоненциальной неустойчивости в конусе.

Теорема 1.3. *Пусть система (1.2) с квазипозитивной матрицей P такова, что функции $j_s(x_s)$ удовлетворяют условиям (1.4) и в соответствующем конусе $K(a_1, ..., a_n)$ неравенствам*

$$a_s j_s(x_s) \ge a_s x_s, \ (s = 1, ..., n), \tag{1.12}$$

тогда для экспоненциальной неустойчивости решений этой системы в рассматриваемом конусе необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.5) имели положительные вещественные части.

Необходимость условий теоремы очевидна.

Для доказательства достаточности заметим, что из условия квазипозитивности матрицы P следует, что соответствующий конус $K(a_1,...,a_n)$ является закрытым сектором [2]. Определим числа $b_1,...,b_n$ из системы уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}|p_{ks}|b_k + p_{ss}b_s = 1 \ \ (s=1,2,...,n)$$

Нетрудно видеть, что все b_s положительные. Затем в рассматриваемом конусе положим $v(x)=\sum_{s=1}^{n}b_s x_s a_s = \sum_{s=1}^{n}b_s|x_s|$. В силу системы (1.2) и условия (1.12) в рассматриваемом конусе имеем

$$d_1\|x\| \le v(x) \le d_2\|x\|; \ v'_{(1.2)} = \sum_{s=1}^{n}|j_s(x_s)| \ge \|x\|.$$

Следовательно, $v'_{(1.2)}(x) \ge \dfrac{1}{d_2}v(x)$, или $\|x(t)\| \ge \dfrac{d_1}{d_2}\|x(t_0)\|\exp\left(\dfrac{1}{d_2}(t-t_0)\right)$.

Теорема доказана.

2. Экспоненциальная устойчивость решений нелинейных разностных систем.

Пусть P – вещественная постоянная невырожденная матрица размерности $n\times n$ и $a_1,...,a_n$ – параметры некоторого конуса $K(a_1,...,a_2)\subset \mathrm{R}^n$.

Определение 2.1. *Будем называть указанную матрицу «квазиположительной», если ее элементы* p_{sk} *и параметры некоторого конуса* $K(a_1,...,a_n)$ *связаны соотношениями*

$$p_{ks}a_k a_s \ge 0 \ \ (s,k=1,...,n) \ . \qquad (2.1)$$

Рассмотрим систему разностных уравнений с «квазиположительной» матрицей P следующего вида

$$x(m+1) = Pj(x(m)), \qquad (2.2)$$

где $m\in J=\{0,1,...,n,...\}$, $j(x(m)) = col(j_1(x_1(m)),...,j_n(x_n(m)))^T$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что все функции $j_s(x_s(m))$ являются однозначными, принимающими в каждой точке множества J конечные значения и сохраняющие знаки своих аргументов ($j_s(0)=0$).

Теорема 2.1. *Пусть правые части системы разностных уравнений (2.2) удовлетворяют сформулированным выше условиям, а функции $j_s(x_s(m))$ удовлетворяют, кроме того, при любом $m\in J$ неравенствам вида*

$$\left|j_s(x_s(m))\right| \le \left|x_s(m)\right| \ (s=1,...,n), \tag{2.3}$$

тогда для абсолютной экспоненциальной устойчивости решений рассматриваемой системы уравнений (2.2) необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\det(P-mE)=0 \tag{2.4}$$

лежали внутри единичного круга.

Необходимость очевидна. Докажем достаточность условий теоремы.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{n}\left|p_{ks}\right|b_k+(p_{ss}-1)b_s=-1 \ (s=1,...,n) \tag{2.5}$$

Нетрудно видеть [5], что все определяемые из системы (2.5) числа $b_1,...,b_n$ будут положительными.

Положим $v(x(m))=\sum_{s=1}^{n}b_s\left|x_s(m)\right|$.

Очевидно, что функции $v(x)$ удовлетворяют неравенству $a\|x\|\le v(x)\le b\|x\|$, где $a>0$, $b>0$. Не нарушая общности, будем считать, что $b>1$. Отсюда нетрудно показать, что на решениях системы (2.2) должно выполняться неравенство

$$v(x(m+1))\le\left(1-\frac{1}{b}\right)v(x(m))=l\,v(x(m)) \tag{2.6}$$

где $0<l<1$.

Из (2.6) заключаем о том, что при всех $m\ge m_0\ge 0$ должно выполняться соотношение

$$\|x(m)\|\le\frac{b}{a}\,l^{\,(m-m_0)}\|x(m_0)\|=Be^{-b\,(m-m_0)}\|x(m_0)\|, \tag{2.7}$$

где $B=\dfrac{b}{a}\ge 1$, $b=-\ln l>0$. Это доказывает достаточность условий теоремы.

Замечание. *Если правые части системы (2.2) заданы в некоторой ограниченной области* $h: m \in I, \|x\| \le R$, *и при этом выполнены все условия теоремы 2.1., то решение системы (2.2) будет экспоненциально устойчиво в области* h.

Имеют также место следующие теоремы.

Теорема 2.2. *Если нелинейное первое приближение системы*

$$x(m+1) = Pj\,(x(m)) + Rj\,(x(m)) \tag{2.8}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1., а $\|R(j\,)\| = o(\|j\,\|)$ *при* $\|j\,\| \to 0$, *то в некоторой достаточно малой окрестности начала координат решения системы (2.8) экспоненциально устойчивы.*

Теорема 2.3. *Пусть конечно-разностная система (2.2) с квазиположительной матрицей* P *такова, что в соответствующем конусе* $K(a_1,...,a_n)$ *выполнены неравенства*

$$a_s j_s(x_s(m)) \ge a_s x_s(m) \ (s = 1,...,n),$$

тогда если все корни характеристического уравнения (2.4) лежат вне круга единичного радиуса, то в указанном конусе решения рассматриваемой системы уравнений экспоненциально неустойчивы.

В качестве примера на применение теоремы 2.1. для случая ограниченной области рассмотрим в области $h: m \in I, \|x\| \le 1$ разностную систему

$$\begin{cases} x_1(m+1) = 0,5\sin^3 x_1(m) + 0,1x_2^5(m) \\ x_2(m+1) = 0,1\sin^3 x_1(m) + 0,5x_2^5(m) \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет корни m_1 и m_2, лежащие внутри единичного круга, а соответствующий конус $K(a_1, a_2)$ имеет параметры a_1 и a_2 равные единице, кроме того в h $|\sin^3 x_1| \le |x_1|$; $|x_2^5| \le |x_2|$.

Найдем числа b_1 и b_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} (0,5-1)b_1 + 0,1b_2 = -1 \\ 0,1b_1 + (0,5-1)b_2 = -1 \end{cases}, \tag{2.9}$$

и положим $v(x_1, x_2) = b_1|x_1| + b_2|x_2|$.

Применим к функции $v(x_1, x_2)$ довольно грубую оценку:

$$2\|x\| \le v(x_1, x_2) \le 3\|x\|,$$

тогда в силу системы

$$v(x(m+1)) \le \left(1-\frac{1}{3}\right)v(x(m)).$$

Отсюда приходим к следующей оценке решений системы (2.9)

$$\|x(m)\| \le \frac{3}{2}\|x(m_0)\| e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)(m-m_0)},$$

которая справедлива для всей области h при $m \ge m_0 \ge 0$.

В заключении заметим, что невозмущенные системы дифференциальных и разностных уравнений (1.2) и (2.2) допускают существование закрытого сектора в виде некоторого выпуклого конуса $K(a_1,...,a_n)$, что, в конечном итоге, и позволило доказать все теоремы, приведенные в настоящей работе.

В теории устойчивости понятие сектора было введено К. П. Персидским [6]. Это понятие оказалось очень плодотворным и оно нашло широкое применение в методе функций Ляпунова.

С. К. Персидський. **Про експонентну стійкість деяких нелінійних систем.**

Р Е З Ю М Е . За допомогою функцій Ляпунова вперше отримані необхідні та достатні умови експонентної стійкості деяких нелінійних систем диференціальних і різницевих рівнянь.

S. K. Persidskiy. **About exponential stability of some nonlinear systems.**

S U M M A R Y . With the help of Lyapunov functions for the first time were received necessary and sufficient conditions for exponential stability of some nonlinear systems of differential and discrete equations.

Список использованной литературы

1. Grujic L. T. Stability analysis of large-scale systems with stable and unstable subsystems- int. J. Contr., 1974. V2Dp 453-463.
2. С.К. Персидский. К исследованию устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений. Прикл. мат. и механика. Изд. АН СССР, Т.34, 1970 г., с. 219-226.
3. Е.А. Барбашин. Функции Ляпунова, М. «Наука», 1970 г., с. 239.
4. С.К. Персидский. Применение однородных многочленов в качестве функций Ляпунова. Динамические системы, вып. 16, 2000г., с. 15-21.
5. С.К. Персидский. Абсолютная устойчивость нелинейных систем уравнений в конечных разностях. Дифф. уравн. и их применения. Изд. Казахского гос. универс. Алма-Ата, 1979г., с. 114-116.
6. К.П. Персидский. Ко второй методе Ляпунова. Известия АН Каз. ССР, серия математики. № 42, вып. 1, 1947 г., Алма-Ата, с. 48-53.

Поступила в редколлегию 15.04.03